Johann Michael Schirmer
Schul- Schreib- und Rechenmeisters in Frankfurt am Main

selbstlehrende Algebra

das ist

gründliche Anweisung

wie ein jeder
welcher die gemeine Rechenkunst verstehet
diese vortrefliche Wissenschaft
ohne mündlichen Unterricht
lernen
und mittelst derselben
alle schwere Rechnungsvorfälle
die sich sowohl bei dem Militare, der Handlung und den Künsten
als auch überhaupt im gemeinen Leben
ereignen
fertig und ohne Schwierigkeit
auflösen kan
mit einem nüzlichen Register

---

vierte Abtheilung

Frankfurt am Main
in der Andreäischen Buchhandlung 1780.

Diese vierte Abtheilung kostet bei dem Verleger 48 Kreuzer.

Selbstlehrende
Algebra

---

vierte Abtheilung

Von den quadratischen Gleichungen.

§. 558.

Wann bei einer Gleichung eine im zweiten Grad (§. 28. 29) stehende unbekante Grösse vorkomt, so nennet man dieselbige eine quadratische Gleichung.

§. 559. Diese wird in die reine und vollständige quadratische Gleichung abgetheilet, dabei noch verschiedene Benennungen vorkommen, welche gehöriger Orten angezeiget werden sollen.

Es folget also:

I. Von den reinen quadratischen Gleichungen.

§. 560. Erhält man bei einer Gleichung nur eine zum zweiten Grad erhabene unbekante Grösse, so heisset sothane Gleichung eine reine quadratische Gleichung, weil die unbekante Potenz mit keiner andern unbekanten Grösse verbunden ist, mithin aus derselben allein die Quadratwurzel gezogen wird.

§. 561. Wann also nach Masgab einer Vorgabe der Auffsaz gemacht, die bekante Glieder abgesondert, und die unbekante Grösse allein gebracht worden (§. 489 u. f.), so wird aus derselben nur schlechthin die Wurzel gezogen (§. 178), und die Gegenseite auf gleiche Weise behandelt.

Z. E. Von etlichen Ehlen Leinwand golte eine Ehle so viele Bazen, als es Ehlen waren, weniger 3 Bazen, folglichen wurden 33 Bazen bezahlt. Fr. Wie viel waren es Ehlen?

Nimt man die Ehlen $= x$, und multiplicirt solche mit der Zahl so vieler Bazen, so erhält man xx, oder x^2, und die Gleichung ist:

$$x^2 - 3 = 33$$

$$x^2 = 33 + 3$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{36}$$

$x = 6$ Ehlen waren es.

Oder allgemein, da für 3 und 33 die Buchstaben b und a genommen werden:

$$x^2 - b = a$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{a + b}$$

$$x = \sqrt{a + b}$$

Resolution:

$a = 33$

$b = 3$

$\sqrt{36}$

6 Ehlen.

Nota. Weil sich die gegenwärtige Vorgaben auf die Quadratwurzel beziehen, so findet die Allgemeinheit der Buchstaben nach §. 494 keine statt (vergl. mit §. 327 Not.), und man könte sich daher nur der gemeinen Zahlen bedienen; weil aber solche öfters Weitläuftigkeit verursachen, so bleibet man willkührlich bei den Buchstaben, und resolvirt solche am Ende gewöhnlich nach ihren zugeeigneten Wehrten: kan alsdann die Quadratwurzel nicht genau ausgezogen werden, so ist die Vorgabe irregulär und nicht

nicht quadratisch componirt, mithin man sich in der Antwort mit einer beiläuffigen Wurzel begnügen muß (§. 167 u. f.), wo nicht eine Irrationalgrösse (§. 179. 190) nach Masgab der Vorgabe auf gewisse Art behandelt werden sol (§. 229 u. f.); komt aber die Wurzel aus einer negativen Zahl oder Grösse zu extrahiren vor, so ist solches schlechterdings ohnmöglich und die Vorgabe falsch, es sei dann, daß nach derselben eine eingebildete Wurzel statt haben solte (§. 252 u. f.).

Z. E. Wann die Helfte und der vierte Theil einer Zahl miteinander multiplicirt werden, und 1 vom Product subtrahirt wird, so ist der Rest gleich 2. Fr. Welches ist die Zahl?

$\frac{1}{2}x \times \frac{1}{4}x = \frac{1}{8}x^2 - 1 = 2$; die Multiplication s. §. 80. 2.

$$\frac{1}{8}x^2 = 2 + 1$$

$$\frac{1}{8}x^2 = 3$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{24}$$

$$x = \sqrt{24}$$

Also ist die verlangte Zahl die Quadratwurzel aus 24, welche aber nicht genau extrahirt, sondern auf Verlangen nur beiläuffig bestimt werden kan, wann man 24 zu Milliontheilgen resolvirt, und aus denselben die Wurzel ziehet (§. 167).

```
       24000000 | 4898
       16000000
8000)   8000000
        6400000
        1600000
        -640000
9600)    960000
         864000
          96000
          -8100
9780)     87900
          78240
           9660
            -64
           9596
```

4898, oder $4\frac{898}{1000}$; dann die erhaltene Wurzel durch die Wurzel von 1000000, d. i. 1000, dividirt, komt diese reducirte Wurzel.

 Solchem-

Solchemnach ist die beiläuffige Quadratwurzel von 24 gleich $4\frac{898}{1000}$, und bleiben noch 9596 Milliontheilgen übrig, welche für nichts zu achten, wie hierüber §. 167 u. f. practische Erklärungen gemacht worden.

Daß aber auch die vorhin zur Antwort erhaltene Grösse: $\sqrt{24}$, d. i. die Wurzel aus 24 (§. 501 e), die rechte Antwort auf die Frage sei, ob sie gleich in Ansehung der gemeinen Zahl nicht eingesehen und bestimmet werden kan (§. 233), solches wird durch die Probe also bewiesen:

Die Helfte von $\sqrt{24}$ ist $\frac{1}{2}\sqrt{24}$, und der vierte Theil: $\frac{1}{4}\sqrt{24}$. Diese beide Grössen miteinander multiplicirt, giebt $\frac{1}{8}$ mahl 24, oder $\frac{1}{8}$ aus 24 (§. 80 Nota I.), d. i. 3, davon 1 subtrahirt, bleibt 2, als die verlangte Zahl. (Die Multiplication der Irrationalzahlen s. §. 232 u. f.).

Item, die Vorgabe sei: **Wann der vierte und der fünfte Theil einer Zahl miteinander multiplicirt und zum Product 2 addirt wird, so hat man 5. Fr. Welches ist die Zahl?**

$$\frac{1}{4}x \times \frac{1}{5}x = \frac{1}{20}x^2 + 2 = 5$$

$$\frac{1}{20}x^2 = 5 - 2$$

$$\frac{1}{20}x^2 = 3$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{60}$$

$x = \sqrt{60}$, also ist die Quadratwurzel aus 60 die verlangte Zahl.

Daß dieses seine Richtigkeit habe, wird wie vorhin bewiesen; dann $\frac{1}{4}\sqrt{60}$ mahl $\frac{1}{5}\sqrt{60}$ giebt: $\frac{1}{20}$ mahl 60, oder $\frac{1}{20}$ aus 60, d. i. 3 (§. 232 u. f.), worzu 2 addirt, die verlangte Antwort 5 bringt.

Item, es würde die Frage aufgeworffen: **Was ist das für eine Zahl, wann man den halben und den fünften Theil derselben miteinander multiplicirt und zum Product 6 addirt, daß 4 komme?**

$$\frac{1}{2}x \times \frac{1}{5}x = \frac{1}{10}x^2 + 6 = 4$$

$$\frac{1}{10}x^2 = 4 - 6$$

$$x^2 = 40 - 60$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-20}$$

$$x = \sqrt{-20}$$

Also ist die Quadratwurzel aus -20 die verlangte Zahl, welche aber ohnmöglich (§. 251), mithin die Vorgabe unrichtig ist.

Indes-

Indessen hat doch die Antwort ihre Richtigkeit, welches also bewiesen wird:

Der halbe Theil dieser erhaltenen Zahl ist $\frac{1}{2}\sqrt{-20}$, und der fünfte Theil: $\frac{1}{5}\sqrt{-20}$; diese nach §. 254 miteinander multiplicirt, giebt -2, und hierzu 6 addirt, bringt die Zahl 4.

§. 562. **Hat die unbekante Grösse einen unbestimten Exponenten** (§. 29), so ist die Auflösung deswegen nicht allgemein, weil sich die bekante Zahlen, wie vorhin angemerket worden (§. 561), immer auf eine bestimte Potenz beziehen müssen.

Z. E. Die Summe zweier unterschiedener Grössen von gleichen Potenzen, d. i. deren unterschiedene Wurzeln gleich erhaben worden, ist 20, und ihr Unterschied 12. Fr. Welches sind diese beide Grössen?

Nennet man die kleinere Potenz x^m, den Unterschied $= b$, und die Summe $= a$, so ist die Gleichung:

$a - x^m = b + x^m$; dann die Summe, weniger die kleinere Potenz, ist gleich dem Unterschied und der kleinern Potenz.

Oder: So die grössere Potenz x^m genennet wird:

$x^m - b = a - x^m$; dann die grössere Potenz, weniger dem Unterschied, ist gleich der Summe, weniger die grössere Potenz.

Erste Gleichung:

$$a - x^m = b + x^m$$

$$a - b = x^m + x^m$$

$$x^m + x^m = a - b$$

$$2)\ 2x^m = a - b$$

$\sqrt{^m}\, x^m = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, oder $a - b$ mit 2 dividirt.

$$x = \sqrt{^m}\, \frac{a-b}{2}$$

Resolution:

$a = 20$
$-b = -12$
2) 8
4 Die kleinere Potenz von der Wurzel 2.
Die Differenz 12 addirt.
16 Die grössere Potenz von der Wurzel 4.

Item: Es sei $a = 145$
$-b = -17$
2) 128
64 Die kleinere Potenz von der Wurzel 8.
Die Differenz 17 addirt.
81 Die grössere Potenz von der Wurzel 9.

Item: Es sei $a = 91$
$-b = -37$
2) 54
27 Die kleinere Potenz, welche eine Cubiczahl von der Wurzel 3 ist.
Die Differenz 37 addirt.
64 Die grössere Potenz, ebenfals eine Cubiczahl von der Wurzel 4.

Item: Es sei $a = 881$
$-b = -369$
2) 512
256 Die kleinere Potenz, welche eine Biquadratzahl von der Wurzel 4 ist (§. 227 a^4).
Die Differenz 369 addirt.
625 Die grössere Potenz, welche ebenfals eine Biquadratzahl von der Wurzel 5 ist (§. 227 a^4).

Nota. Was §. 181 von der Quadratwurzel gesagt worden, nemlich, daß solche positiv und auch negativ genommen werden könne, darauf muß hier bei den quadratischen Gleichungen insonderheit der Bedacht genom-

genommen werden, indeme auf solche Weise bei einer jeden quadratischen Auflösung zweierlei Wehrten von x, nehmlich ein positiver und negativer Wehrt, statt finden müssen.

Z. E. Als einer gefragt wurde, wie viel er wöchentlich einzunehmen habe? antwortete er: Wann ich 7 fl. darzu thue, und 7 fl. davon nehme, alsdann Summe und Rest miteinander multiplicire, so habe ich 95 fl. Fr. Wie viel ist die wöchentliche Einnahme?

Wann die unbekante wöchentliche Einnahme $= x$, das Product 95 fl $= a$, und 7 fl $= b$ genommen werden, so ist die Procedur und Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} x + b \text{ Die Summe} \\ x - b \text{ Der Rest} \end{array}\right\} \text{s. §. 501 a. b.}$$

$$\begin{array}{l} - xb - b^2 \\ x^2 + xb \\ \hline x^2 - b^2 = a \\ \hline \sqrt{x^2} = \sqrt{a + b^2} \\ \hline x = \sqrt{a + b^2} \end{array}$$

Resolution:

$$\begin{array}{l} a = 95 \\ b^2 = 49 \\ \hline \sqrt{144} \\ \hline \pm 12 \end{array}$$

$\pm$ 12 fl. ist die wöchentliche Einnahme, und kan als eine Quadratwurzel positiv und negativ genommen werden, weswegen man sie auch also zu bezeichnen pfleget (§. 266 e. f).

Probe nach der positiven Wurzel.

$$\begin{array}{r} 12 \\ -7 \\ \hline 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \\ +7 \\ \hline 19 \\ 5 \\ \hline 95 \text{ fl.} \end{array}$$

Probe nach der negativen Wurzel:

$$\begin{array}{r} -12 \\ +7 \\ \hline -5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -12 \\ -7 \\ \hline -19 \\ -5 \\ \hline 95 \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} (\S.78).$$

95 fl.

Nachdem 7 addirt und 7 subtrahirt war, so wurde alsdann nur reducirt (s. §. 500).

Zur Uebung (s. §. 506 Not. II.).

1) Ein Capitain wurde gefragt: Aus wie viel Mann seine Compagnie bestünde? worauf er antwortete: In unserer Stadt liegen drei Compagnien, worunter eine Compagnie 15 Mann mehr, die andere aber 15 Mann weniger als meine Compagnie hat, und wann man die Anzahl der Mannschaft jener beiden Compagnien miteinander multiplicirt, so ist das Product 3375, als woraus die Mannschaft meiner Compagnie gefunden werden kan. Fr. Wie stark war solche? Antw. 60 Mann.

Wann die unbekante Mann einer Compagnie $= x$, $3375 = a$, und $15 = b$, so giebt es die vorige Gleichung, wobei die Quadratwurzel aus 3600 zu ziehen vorkommen wird.

2) Als ein Sohn seines Vaters Alter wissen wolte, sagte der Vater: Dein Grosvater ist 24 Jahr älter, und du bist 24 Jahr jünger, als ich: multiplicirt man die Zahl deines Grosvaters und die Zahl deiner Jahre miteinander, so komt zum Product 580. Fr. Wie alt war also der Vater? Antw. 34 Jahr.

Werden 24 Jahre $= a$, $580 = b$, und des Vaters Jahre $= x$ genommen, so ist des Grosvaters Alter: $x + a$, und des Sohns Alter: $x - a$, worauf die Quadratzahl 1156 kommen wird.

Item:

Item: Zu einer Zahl wurden 3 addirt, und die Summe quadrirt: alsdann von eben der Zahl 3 subtrahirt, und der Rest abermahl quadrirt: hierauf beide Quadratzahlen addirt, und die Summe durch 5 dividirt, so kamen $253\frac{3}{5}$. Fr. Was war solches für eine Zahl?

Die Zahl sei $= x$, $253\frac{3}{5} = a$, $3 = b$, und $5 = c$.

$$\begin{array}{r} x + b \\ x + b \\ \hline x^2 + xb + xb + b^2 \\ \hline x^2 + 2xb + b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x - b \\ x - b \\ \hline x^2 - xb - xb + b^2 \\ \hline x^2 - 2xb + b^2 \end{array}$$

Beide Quadraten werden addirt:

$$x^2 + 2xb + b^2 + x^2 - 2xb + b^2 \text{ Reducirt}$$

$$\frac{2x^2 + 2b^2}{c} = a$$

$$2)\ 2x^2 + 2b^2 = ca$$

$$x^2 + b^2 = \frac{ca}{2}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-b^2 + \frac{ac}{2}}$$

$$x = \sqrt{-b^2 + \frac{ac}{2}}$$

Resolution:

$$\begin{array}{r} ac = 1268 \\ 2) \overline{} \\ 634 \\ -b^2 = -9 \\ \hline \sqrt{625} \\ \hline \pm 25 \text{ war die Zahl.} \end{array}$$

Probe nach der positiven Wurzel:

$$\begin{array}{r} 25 \\ 3 \\ \hline 28 \\ 28 \\ \hline 224 \\ 56 \\ \hline 784 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 25 \\ -3 \\ \hline 22 \\ 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 484 \\ 784 \\ \hline 5)\,1268 \\ \hline 253\frac{3}{5} \end{array}$$

Probe nach der negativen Wurzel:

$$\begin{array}{rl} -25 & \text{f. Add. §. 62.} \\ -3 & \\ \hline -28 & \text{f. Mult. §. 78.} \\ -28 & \\ \hline 224 & \\ 56 & \\ \hline 784 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} -25 & \text{f. Subtr. §. 68.} \\ +3 & \\ \hline -22 & \\ -22 & \\ \hline 44 & \\ 44 & \\ \hline 484 & \\ 784 & \\ \hline 5)\,1268 & \\ \hline 253\frac{3}{5} & \end{array}$$

Item: Da die Regel de Tri vorher nöthig ist.

Ein Handelsmann gewinnet an einem Wechsel $\frac{1}{120}$ der Summe pro Cento, das war in allem 30 Thlr. Fr. Wie stark war der Brief?

Der Verstand dieser Vorgabe ist: Wann z. E. die Summe 400 Thlr. wäre, und $\frac{1}{20}$ derselben solte pro Cento Gewinn gerechnet werden, so wäre $\frac{1}{20}$ von $400 = 20$, diese 4 mahl genommen, machte 80 Thlr. als den Gewinn.

Dahero ist die Regel de Tri zu gegenwärtiger Vorgabe, wann die Summe $= x$ genommen wird:

Thlr.

Thlr.		Thlr.		Thlr.
100	—	$\frac{1}{120} x$	—	x, d.i. 100 Thlr. thun $\frac{1}{120}$ der Summe, was thut die Summe?
12000	—	x	—	x

$$\frac{x \cdot x}{12000} = \frac{x^2}{12000}$$

Nun ist die Gleichung:

$$\frac{x^2}{12000} = 30$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{360000}$$

$x = 600$ Thlr. enthielte der Wechsel.

Hier findet keine negative Wurzel statt, es sei dann, daß man die 600 Thlr. auf eine Schuld applicirte.

3) In einer Goldbörse befinden sich Ducaten: thut man einen darzu, und multiplicirt die Zahl derselben alsdann mit ihr selbst; thut man aber einen davon, und multiplicirt die Zahl der Uebrigen wieder mit ihr selbst, addirt die beide Quadratzahlen, und dividirt die Summe durch 3, so komt zum Quotienten $216\frac{2}{3}$. Fr. Wie viel Ducaten waren in der Börse? Antw. 18.

Wann die Ducaten $= x$, $216\frac{2}{3} = a$, und $3 = b$, so ist die Gleichung wie vorhin.

4) Ein Rechenmeister wurde gefragt: Wie viele Schüler er habe? Worauf er antwortete: Thut man zu deren Anzahl noch 5, und quadrirt die Summe; thut man aber 5 davon, und multiplicirt den Rest ebenfals mit ihm selbst, addirt beide Quadraten, und dividirt die Summe durch 3 mahl 3, so komt zum Quotienten $233\frac{1}{9}$. Fr. Wie viele Schüler waren es? Antw. 32.

Die Gleichung ist wie vorhin, nur daß $a = 233\frac{1}{9}$, $b = 5$, und $c = 9$, das Quadrat aber 1024 kommen wird.

§. 563.

§. 563. Muß bei dieser Art Vorgaben mehr als eine Gleichung angestellet, folglichen erst der Wehrt von einer unbekanten Grösse gesuchet, und alsdann substituirt werden (§. 548), so ist dabei zu merken, daß sothaner gefundene Wehrt zu eben dem Grad erhaben werden müsse, als in welchem sich jene Grösse, an deren Stelle dieser Wehrt gesezet werden sol, befindet.

Z. E. Man hat zwo Zahlen quadrirt, beide Quadraten addirt, und zur Summe 1801 bekommen; da nun der Unterschied beider Quadraten 649 ist, so fragt sichs: Was solches für zwo Zahlen seien?

Die unbekante kleinere Zahl sei $= x$, die Grössere $= y$, $1801 = a$, und $649 = b$.

Erste Gleichung:

$x^2 + y^2 = a$; dann wann beide Quadraten addirt werden, sollen sie gleich a sein.

$\sqrt{y^2} = \sqrt{a - x^2}$

$y = \sqrt{a - x^2}$ Also ist der Wehrt von der grössern Zahl $y = \sqrt{a - x^2}$.

Zweite Gleichung:

$y^2 - x^2 = b$; dann der Unterschied der zwei Quadraten sol gleich b sein.

Nun wird der in der ersten Geichung gefundene Wehrt von y, nemlich: $\sqrt{a - x^2}$, zur zweiten Potenz erhaben, d. i. die Quadratwurzel weggethan (§. 180) und an die Stelle von y^2 gesezet, um den Wehrt von x zu erhalten.

$$a - x^2 - x^2 = b$$

$$2)\ a - b = 2x^2$$

$$\sqrt{\frac{a-b}{2}} = \sqrt{x^2}$$

$$\sqrt{\frac{a-b}{2}} = x$$

Resolu-

Resolution:	Der Wehrt von y in der ersten Gleichung ist: $\sqrt{a - x^2}$, dahero
$a = 1801$	$a = 1801$
$-b = -649$	$-x^2 = -576$
2) 1152	$\sqrt{1225}$
$\sqrt{576}$	
24 Die kleinere Zahl.	35 Die grössere Zahl.

5) Man hat zween ungleich grosse quadratförmige Pläze mit 1525 Pflanzen in gleicher Weite bestelt, und auf den Grössern 275 Pflanzen mehr als auf den Kleinern gebracht. Frag. Wie viel sind auf eine Reihe eines jeden Plazes Pflanzen gekommen? Antw. Auf den Kleinern 25, und auf den Grössern 30.

Wann die unbekante kleinere Zahl $= x$, die Grössere $= y$, $1525 = a$, und $649 = b$, so ist die Gleichung wie vorhin, wobei das kleinere Quadrat $= 625$, und das Grösserr $= 900$ kommen muß.

6) Auf einem gefährlichen Posten wurden freiwillige Grenadier und Musquetier postiret, mit Versprechen, wann sie denselben behaupteten, ein jeder Grenadier so viel Kreuzer haben solte, als ihrer, der Grenadier, wären, und ein jeder Musquetier ebenfals so viel Kreuzer erhalten solte, als ihrer wären: da sie nun zusammen 16 fl. 16 kr. erhielten, und die Grenadier 2 fl. 56 kr. mehr als die Musquetier bekamen, so ist die Frage: Wie viel es Grenadier und Musquetier gewesen? Antw. 24 Grenadier und 20 Musquetier.

Wann die kleinere Zahl $= x$, die Grössere $= y$, 16 fl. 16 kr. in lauter Kreuzern $= a$, und 2 fl. 56 kr. ebenfals in Kreuzern $= b$ (s. §. 41), so ist die Gleichung wie vorhin.

Zuweilen können auch hieher gehörige Vorgaben durch eine Gleichung, und also ohne Substitution, aufgelöset werden.

Z. E. Was sind das für zwo Zahlen, da, wann man sie addirt, zur Summe 60, und so man sie multiplicirt, zum Product 800 komt?

Hier wird erst die Summe gleich getheilet, und zu einem Theil die halbe Differenz addirt, vom andern Theil aber subtrahirt; dann zwo Zahlen werden aus ihrer Summe und aus ihrem Unterschied gefunden, wann zu der Helfte der Summe die halbe Differenz einmahl addirt und einmahl subtrahirt wird.

Nennet man alsdann die Summe $= a$, die halbe Differenz $= x$, und das Product $= b$, so ist

die grössere Zahl: $\frac{1}{2}a + x$
die kleinere Zahl: $\frac{1}{2}a - x$

Das heist: Die Helfte der Summe und die Helfte der Differenz, und die Helfte der Summe weniger die Helfte der Differenz, sind die zwo Zahlen, welche multiplicirt werden.

$$-\tfrac{1}{2}ax - x^2$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{2}ax$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 - x^2 = b$$
$$\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b} = \sqrt{x^2}$$
$$\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b} = x$$

Resolution:

$\frac{1}{4}a^2 = 900$; dann a ist gleich 60, das Quadrat $= 3600$,
$-b = -800$ davon $\frac{1}{4} = 900$, wovon b, als das Product, subtrahirt und aus dem Rest die
$\sqrt{100}$ Wurzel gezogen wird.

$10 = x$, als die halbe Differenz: diese zur halben Summe, nemlich 30, addirt, bringt 40 zur grössern- und solche von 30 subtrahirt, lässet 20 zur kleinern Zahl übrig, deren Summe 60 und ihr Product 800 ist.

7) Einer kaufte 100 ℔. zweierlei Waar, und wurde gefragt: Wie viel Pfund er von jeder Sorte gekauft hätte? Worauf er antwortete: Wann man ein jedes Pfund von der einen Sorte so viel Kreuzer rechnet, als es von der andern Sorte Pfund sind, so kommen zum Product 2304 kr. Fr. Wie viel Pfund hatte er von jeder Sorte gekauft? Antw. 64 ℔. von der einen, und 36 ℔. von der andern Waare?

Die Helfte von 100 sei $= \frac{1}{2}a$, die halbe Differenz $= x$, und das Product $= b$, so hat man die vorige Gleichung und Auflösung.

8) Zwo Compagnien Soldaten bestehen zusammen aus 180 Mann, und in der einen Compagnie befinden sich mehr Mann, als in der andern: multiplicirt man die Zahl der Mannschaft beider Compagnien miteinander, so ist das Product 7700. Fr. Aus wie viel Mann bestehet jede Compagnie? Antw. Die eine aus 110, und die andere aus 70 Mann.

Die Auflösung ist gleich der Vorigen, wobei die Wurzel aus 400 zu ziehen vorkommen wird.

Item: Wann die Differenz zwoer Zahlen 10, und das Product derselben 3000 ist, was sind solches für Zahlen?

Die Summe sei $= x$, die Differenz $= a$, und das Product $= b$, so ist die grössere Zahl $x + \frac{1}{2}a$

und die Kleinere $x - \frac{1}{2}a$

$$\begin{array}{r} -\frac{1}{2}ax - \frac{1}{4}a^2 \\ x^2 + \frac{1}{2}ax \\ \hline x^2 - \frac{1}{4}a^2 = b \\ \hline \sqrt{x^2} = \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2} \\ \hline x = \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2} \end{array}$$

Resolution:

$$\begin{array}{l} b = 3000 \\ \frac{1}{4}a^2 = 25 \\ \hline \sqrt{3025} \\ \hline \end{array}$$

55 ist die halbe Summe, hierzu die halbe Differenz, d. i. 5, giebt die eine Zahl 60, und 5 davon, bleiben 50 für die andere Zahl.

9) A und B kauften Tuch, davon B 144 Ehlen mehr als A nahm: nimt man des A Ehlen so oft, als des B Ehlen sind, so sind deren 9216. Fr. Wie viel hat ein jeder Ehlen gekauft? Antw. A 48 und B 192.

Die Auflösung ist wie vorhin, dabei das Quadrat von 14400 kommen wird.

10) In einer Vestung liegen zwei Battaillons in Guarnison, von welchen eines aus 150 Mann mehr als das andere bestehet: multiplicirt man beide Zahlen der Mannschaft miteinander, so ist das Product 450000. Fr. Aus wie viel Mannschaft bestehet jedes Battaillon? Antw. Eines aus 750 und das andere aus 600 Mann.

Nach der vorigen Auflösung muß hier die Quadratwurzel aus 455625 gezogen werden.

Item: **Die Differenz zwoer Zahlen ist 15, und die Summe ihrer Quadraten 2925, was sind solches für Zahlen?**

Die halbe Summe der zwo Zahlen sei $= x$, die Differenz $= a$, und die Summe der Quadraten $= b$.

Die grössere Zahl: $x + \frac{1}{2}a$, solche wird quadrirt.

$$\begin{array}{r} x + \frac{1}{2}a \\ \hline \frac{1}{2}ax + \frac{1}{4}a^2 \\ x^2 + \frac{1}{2}ax \\ \hline x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 \end{array}$$

Quadr. der grössern Zahl.

Die kleinere Zahl: $x - \frac{1}{2}a$, solche wird quadrirt.

$$\begin{array}{r} x - \frac{1}{2}a \\ \hline -\frac{1}{2}ax + \frac{1}{4}a^2 \\ x^2 - \frac{1}{2}ax \\ \hline x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 \end{array}$$

Quadr. der kleinern Zahl.

Quadr. der grössern Zahl wird addirt: $x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2$

Summe der beiden Quadr. 2) $2x^2 + \frac{1}{2}a^2 = b$

Der Wehrt von einem Quadr. $x^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}b$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{4}a^2}$$

Der Wehrt von der halben Summe beider Zahlen: $x = \sqrt{\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2}$

Resolu-

Resolution:

$\frac{1}{2}b = 1462\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{4}a^2 = -56\frac{1}{4}$

$\sqrt{1406\frac{1}{4}}$

$37\frac{1}{2}$ Ist die halbe Summe beider Zahlen. Hierzu die halbe Differenz $7\frac{1}{2}$, thut 45, als die erste Zahl.

Von dieser halben Summe $37\frac{1}{2}$ die halbe Differenz $7\frac{1}{2}$ subtrahirt, bleiben 30 für die andere Zahl.

Probe:

Die eine Zahl ist 45, und ihr Quadrat 2025
Die andere Zahl ist 30, und ihr Quadrat 900

2925 Summe der beiden Quadraten.

11) Einer hat zwei Stüke kostbaren Zeugs, davon ein Stük 5 Ehlen mehr als das andere hält: troquirt oder tauschet dagegen Coffeebohnen, also, daß er für jede Ehle eines jeden Stüks so viele Pfund Bohnen erhält, als dasselbe Stük Ehlen in sich begreift, mithin 1525 ℔. bekomt. Fr. Wie viel Ehlen hat jedes Stük gehalten? Antw. Das eine 25 und das andere 30 Ehlen.

Nimt man, wie vorhin, die halbe Summe der Ehlen beider Stüke $= x$, die 5 Ehlen, als den Unterschied, $= a$, und $1525 = b$, so komt bei der Resolution die Quadratwurzel aus $756\frac{1}{4}$ zu ziehen vor: die Procedur aber ist wie vorhin, indeme die Anzahl der Ehlen, in Ansehung der Coffeebohnen, mit ihr selbst multiplicirt, d. i. quadrirt werden muß.

12) Einem Münzmeister wurde aufgetragen, für 346 fl. zweierlei Medaillen zu verfertigen, und zwar von einer Gattung 4 Stüke mehr als von der andern Gattung, ein jedes Stük einer Sorte aber solte so viel Gulden wehrt sein, als Stüke derselben Sorten

 wären.

wåren. Fr. Wie viel Stůke hatte er also zu verfertigen? Antw. 15 und 11.

Die Auflösung ist die Vorige, dabei die Wurzel, oder die halbe Summe der såmtlichen Stůke, 13 sein wird.

Item: Die Summe zwoer Zahlen ist 75, und die Differenz ihrer Quadraten 1125, was sind solches für Zahlen?

Die Differenz der zwo Zahlen sei $= x$, $75 = a$, und $1125 = b$.

Dahero ist die grössere Zahl: $\frac{1}{2}a + x$, und die kleinere Zahl: $\frac{1}{2}a - x$.

Mithin ist die Erhebung der grössern Zahl zum Quadrat:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}a + x \\ \frac{1}{2}a + x \\ \hline \frac{1}{2}ax + x^2 \\ \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ax \\ \hline \frac{1}{4}a^2 + ax + x^2 \end{array}$$

und der kleinern Zahl zum Quadrat:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}a - x \\ \frac{1}{2}a - x \\ \hline -\frac{1}{2}ax + x^2 \\ \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ax \\ \hline \frac{1}{4}a^2 - ax + x^2 \end{array}$$

Dieses von jenem Quadrat subtrahirt:

$$\frac{1}{4}a^2 + ax + x^2 - \frac{1}{4}a^2 + ax - x^2 = b$$

$$2a)\ 2ax = b$$

$$x = \frac{b}{2a}$$

Resolution:

$$b = 1125$$

$$2a = 150)\ \overline{}$$

$7\frac{1}{2}$ Ist die Differenz der zwo Zahlen, mithin die grössere Zahl halb 75, d. i. $37\frac{1}{2} + 7\frac{1}{2}$, d. i. 45, und die kleinere Zahl $37\frac{1}{2} - 7\frac{1}{2}$, d. i. 30.

Probe:

Probe:

30	45
30	45
900 Quadrat der kleinern Zahl.	225
	180
	2025 Quadrat der grössern Zahl.

2025
900
1125 Differenz der Quadraten.

13) Einer kauft 100 ℔. zweierlei Waar, und wurde gefragt: Wie viel Pfund er von jeder Sorte gekauft hätte? worauf er antwortete: Wann die Pfund von jeder Sorte quadrirt werden, so ist die Differenz der Quadraten 2800. Fr. Wie viel Pfund hat er von jeder Sorte gekauft? Antw. Von der einen 64 und von der andern Sorte 36 ℔.

Hier ist die Summe der zwo Zahlen = 100; wird zu der Helfte einmahl die Differenz addirt und einmahl subtrahirt, Summe und Rest quadrirt, und wie vorhin verfahren, so komt $x = \frac{b}{2a}$.

14) Zwo Compagnien Soldaten bestehen zusammen aus 180 Mann, und in der einen Compagnie befinden sich mehr als in der andern: quadrirt man jede Compagnie, so ist der Unterschied beider Zahlen Quadraten 7200. Fr. Aus wie viel Mann hat jede Compagnie bestanden? Antw. Die eine aus 110 und die andere aus 70 Mann?

Nimt man $a = 180$, und $b = 7200$, so ist es die vorige Auflösung.

Item: Einer hat in Cassa Conventionsthaler und französische Laubthaler, und zwar von einer Sorte 24 Stük mehr als von der andern Sorte: werden die Zahlen beider Sorten

quadrirt, und das kleinere Quadrat vom Grössern subtrahirt, so ist der Unterschied 5184. Fr. Aus wie viel Stüken bestehet jede Sorte?

Nennet man die Conventionsthaler x, die Laubthaler auch x, $24 = b$, und $5184 = a$, so ist die Procedur:

$$\begin{array}{l} x + b \text{ Die Sorte, welche 24 Stük mehr ist.} \\ x + b \\ \hline bx + b^2 \\ x^2 + bx \\ \hline x^2 + 2bx + b^2 \text{ Das Quadrat der Sorte, so 24 Stük mehr enthält, davon das Quadrat der andern Sorte subtrahirt wird.} \\ -x^2 \\ \hline 2bx + b^2 = a \text{ Der Unterschied.} \\ 2b)\ 2bx = a - b^2 \\ x = \frac{a - b^2}{2b} \end{array}$$

Resolution:

$$\begin{array}{rl} a = & 5184 \\ -b^2 = & -576 \\ \hline 2b = 48) & 4608 \mid 96 = x, \\ & 432 \\ \hline & 288 \\ & 288 \end{array}$$

als die kleinere Zahl, welche nach obiger Bestimmung die Conventionsthaler sind; hierzu 24 addirt, giebt 120, als die grössere Zahl, in Laubthalern.

Man hat zwar hier zweierlei Grössen, als: Conventions- und Laubthaler; weil es aber nicht ihren Wehrt, sondern schlechthin ihre Zahlen betrift, denen man allerlei Benennungen beilegen kan, so sind keine zweierlei, wohl aber, wegen der Subtraction, einerlei Buchstaben nöthig.

15) Eine Besazung bestehet aus Grenadieren und Musquetieren, und zwar von Lezteren 60 Mann mehr als der Ersteren sind: quadrirt man die Zahlen beider Mannschaften, so ist der Unterschied der Quadraten 51600. Fr. Aus wie viel Grenadieren und Musquetieren

bestehet

beſtehet die Beſazung? Antw. Aus 400 Mann Grenadieren und aus 460 Mann Musquetieren.

Werden die Musquetierer $= x + b$, die Grenadierer $= x$, und der Unterſchied der Quadraten $= a$ genommen, ſo iſt die Auflöſung wie vorhin.

16) Man hat zwo Zahlen, davon iſt eine $4\frac{1}{2}$ kleiner als die andere, und der Unterſchied ihrer Quadraten iſt $159\frac{3}{4}$. Fr. Welches ſind dieſe Zahlen? Antw. Die Kleinere iſt $15\frac{1}{2}$ und die Gröſſere 20.

Nennet man die kleinere Zahl $= x$, den Unterſchied der beiden Zahlen $= b$, und den Unterſchied der Quadraten $= a$, ſo iſt es die vorige Auflöſung.

§. 564. **Befindet ſich in jedem Theil einer Gleichung eine zum zweiten Grad erhabene Potenz unter einerlei Zeichen, ſo iſt zwar eine ſolche Gleichung anfangs eine hieher gehörige quadratiſche Gleichung (§. 558); weilen aber hernach, wann die unbekante Gröſſen gewöhnlich auf eine Seite gebracht werden (§. 489), dieſe beide Gröſſen einander aufheben, und alſo aus der Gleichung wegkommen, ſo wird ſie zu einer einfachen Gleichung (§. 504).**

Z. E. Ein Gärtner bekam eine Anzahl Bäumgen, um damit ein Quadrat von einem Luſtwäldgen zu bepflanzen: da ihme nun nach ſeinem erſten Ueberſchlag 284 Stük übrig blieben, wolte er zu einer jeden Reihe noch ein Bäumgen ſezen, und alsdann noch eine Reihe mehr, mithin ein gröſſer Quadrat, machen, da fehlten ihm aber 25 Stük. Fr. Wie viel hatte er Bäumgen bekommen?

Wann eine Reihe des erſtern und kleinern Quadrats $= x$ genommen wird, ſo iſt das Quadrat ſelbſt $= x^2$, werden $284 = a$, und $25 = b$ genommen, ſo iſt die Gleichung:

$$x^2 + a = x^2 + 2x + 1 - b,$$

d. i. nach dem erſten Ueberſchlag iſt das Quadrat x^2, und 284 Stük, ſo übrig geblieben, die Zahl der Bäumgen, und der erſte Theil der Gleichung.

Dem iſt gleich x^2, und noch 2 Reihen und 1 Stük (indeme 2 Reihen dieſes gröſſern Quadrats 1 Stük mehr machen,) weniger b, oder 25 Stük.

$$x^2 - x^2 - 2x = -a - b + 1$$

$$-2x = -a - b + 1 \quad \text{Umgew.}$$

$$2)\ a + b - 1 = 2x$$

$$\frac{a + b - 1}{2} = x$$

 Reſolu-

Resolution:

$a = 284$
$b - 1 = 24$
2) 308
154 Ist der Wehet von x, oder eine Reihe: diese quadrirt, kommen: 23716, worzu 284 addirt, die Zahl von 24000 machen.

Oder, man quadrirt 155, und ziehet 25 davon ab, so bleiben auch 24000 Stük.

Hierbei hat man die Regel: Aus dem Ueberschuß bei Formirung eines Quadrats, und aus dem Mangel, wann man ein grösser Quadrat formirt, wird eine jede gegebene Zahl gefunden, wann man zu dem Ueberschuß den Mangel weniger 1 addirt, die Helfte der Summe quadrirt, und alsdann den Ueberschuß darzu nimt; oder: wann man den Ueberschuß und 1 zu dem Mangel addirt, die Helfte quadrirt, und den Mangel subtrahirt.

Z. E. Bei Ausziehung einer Quadratwurzel blieben 23 übrig, und da man die Wurzel um 1 grösser nahm, fehleten 40. Fr. Welches war die Zahl?

Der Ueberschuß ist 23
Der Mangel 40 — 1 ist 39
2) 62
$31 \times 31 = 961$
$+ 23$
984 war die Zahl.

Der Ueberschuß 23 + 1 ist 24
Der Mangel 40
2) 64
$32 \times 32 = 1024$
$- 40$
984 war die Zahl.

17) Ein Ingenieur solte eine Compagnie ins Vierek stellen, und entweder 16 Mann übrig lassen, oder das Viereck grösser machen, und noch 9 Mann darzu thun. Fr. Wie stark war die Compagnie? Antw. 160 Mann.

Die Rechnung ist die Vorige, wobei der Wehrt von $x = 12$ sein wird.

18) Man

18) Man hat aus einer Zahl die Quadratwurzel zu ziehen: einmahl bleiben 36 übrig, nimt man die Wurzel um 1 grösser, so fehlen 19. Fr. Wie groß ist die Zahl? Antw. 765.

Die Gleichung ist wie vorhin, wobei der Wehrt von $x = 27$ kommen wird.

§. 565. Komt in einen Theil der Gleichung eine in dem zweiten Grad stehende unbekante Grösse, und ein jedes der übrigen Glieder ist mit einer in dem ersten Grad stehenden unbekanten Grösse multiplicirt, so wird ein jeder Theil der Gleichung mit sothaner unbekanten Grösse dividirt, da dann eine solche Gleichung gleichfals, wie vorhin, in eine einfache oder in eine Gleichung vom ersten Grad verwandelt wird.

Z. E. In etlichen Kästlein befindet sich einerlei Waar, deren Wehrt 12 mahl so viel Gulden ist, als Kästlein sind, und noch 3 fl. darzu, jegliches Kästlein aber wiegt netto $15\frac{1}{4}$ tb. und kommen allemahl $\frac{1}{5}$ so viel Pfund, als Kästlein sind, um 20 fl. Fr. Wie viel sind der Kästlein?

Die Kästlein seien $= x$, 20 fl $= a$, 3 fl $= b$, $15\frac{1}{4}$ tb $= c$, $12 = d$, und $\frac{1}{5} = e$.

Hier sage man nach der Regel de Tri: 20 fl. thun $\frac{1}{5}$ der Pfund mit der Zahl der Kästlein multiplicirt, was thun 12 tb. mit der Zahl der Kästlein multiplicirt, und noch 3 fl. darzu? so erhält man den ersten Theil der Gleichung, also:

$$a \text{ --- } ex \text{ --- } dx + b$$

$$\frac{\qquad ex}{\dfrac{edx^2 + ebx}{a}}$$ Erster Theil der Gleichung.

Für den andern Theil der Gleichung saget man: Ein Kästlein thut $15\frac{1}{4}$ tb, was thun die sämtliche Kästlein?

$$1 \text{ --- } c \text{ --- } x$$

$$\frac{\qquad x}{\dfrac{cx}{1}}$$ Der andere Theil der Gleichung, wobei der Nenner 1 nicht nöthig ist (s. §. 123).

$$\frac{edx^2 + ebx}{a} = cx$$

$$x)\ edx^2 + ebx = acx$$

$$edx + eb = ac$$

$$ed)\ edx = ac - eb$$

$$x = \frac{ac - eb}{ed}$$

Resolution:

$$ac = 305$$
$$-eb = -1$$
$$304$$
$$ed = 4)\ \overline{304}$$

76 Kästlein.

Probe:

76 Kästlein
zu 12 fl.
912
+ 3 fl.
915 fl. der Betrag.

76 Kästlein
zu $15\frac{1}{4}$ lb.
1159 lb.

3) 76 Kästlein. fl. lb.
$25\frac{1}{3}$ lb. —— 20 —— 1159? Antw. 915 fl.

fl. lb. fl.
Oder: 20 —— $25\frac{1}{3}$ —— 915? Antw. 1159 lb.

19) Ein Handelsmann sandte seinem Freund etliche Kistgen mit Waar, deren Betrag 20 mahl so viel Gulden, und noch 5 Gulden darzu, ausmachte, als Kistgen waren: da sich nun in jedem Kistgen $8\frac{1}{10}$ lb. befanden, und $\frac{1}{5}$ mahl so viel Pfund als Kistgen waren, 10 fl. ausmachten, so fragt sichs: Wie viel es Kisten gewesen? Antw. 20.

Wann die Zahl der Kistgen $= x$, 10 fl. $= a$, 5 fl. $= b$, $8\frac{1}{10}$ lb $= c$, 20 lb $= d$, und $\frac{1}{5} = e$, so ist die Gleichung wie vorhin, mithin wird $x = \frac{ac - eb}{ed}$

20) In

20) In etlichen Paqueten befanden sich Geldstüke, deren Wehrt 10 mahl so viel, und noch 2 Thlr. darzu, ausmachte, als Paqueten waren, jegliches Paquet woge $8\frac{1}{100}$ Loth, und $\frac{1}{4}$ mahl so viel Loth, als Paqueten waren, thäten 50 Thlr. Fr. Wie viel waren es Paqueten? Antw. 160.

Wann nach vorstehender Gleichung hier $x =$ die Paqueten, $a = 50$ Thlr. $b = 2$ Thlr. $c = 8\frac{1}{100}$ Loth, $d = 10$, und $e = \frac{1}{4}$, so hat man die vorige Gleichung.

§. 566. Gleichwie es sich nach §. 564. 565 fügen kan, daß eine Gleichung, welche anfänglich eine quadratische Gleichung ist, zu einer einfachen Gleichung wird, also geschiehet es auch öfters, daß eine Gleichung, die anfänglich eine einfache Gleichung ist, sich hernach in eine quadratische Gleichung verwandelt, wann nehmlich der eine Theil der Gleichung mit einer unbekanten Grösse dividirt, und der andere Theil mit eben dieser unbekanten Grösse multiplicirt ist, und sodann jeder Theil der Gleichung mit dieser unbekanten Grösse multiplicirt wird.

Z. E. Das Product zwoer Zahlen ist 1296, und der Quotient, wann mit der Kleinern die Grössere dividirt wird, 36, was sind solches für Zahlen?

Das Product 1296 sei $= a$, der Quotient $= b$, die grössere Zahl $= x$, und die Kleinere $= y$.

$y) \; xy = a$, d. i. die beide Zahlen miteinander multiplicirt, sind gleich a, dahero der Wehrt von x ist, wann a mit y dividirt wird.

$$x = \frac{a}{y}$$

Dann wann z. E. $x = 6$ und $y = 4$ genommen wird, so ist $xy = 24$, d. i. $= a$; wird nun 24 durch y, nemlich 4, dividirt, so ist der Quotient 6, d. i. $= x$.

$\frac{x}{y} = b$,

$$\frac{x}{y} = b$$, d. i. Wann man x durch y dividirt, so ist der Quotient $= b$: diese Gleichung mit y gegrössert, so wird $x = y$ mit b multiplicirt.

$$x = by$$

Dann wann x, d. i. 6, durch y, d. i. 4, dividirt wird, so ist der Quotient $= 1\frac{1}{2}$, d. i. b: dieses mit y, d. i. 4, multiplicirt, giebt 6, d. i. $= x$, wie vorhin.

$$\frac{a}{y} = by$$, d. i. Der Wehrt von x in der ersten Gleichung ist gleich dem Wehrt von x in der zweiten Gleichung: diese Gleichung wird, um den Bruch wegzuschaffen, mit y gegrössert, alsdann mit b dividirt, so komt der Wehrt von y^2, davon die Wurzel, d. i. y^2 = der Wurzel von $\frac{a}{b}$ ist (s. §. 501).

$$b)\; a = by^2$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{y^2}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = y$$

Resolution:

$$a = 1296$$

$$b = 36)\;\overline{\qquad}$$

$$\sqrt{36}$$

6 Die kleinere Zahl: wird mit dieser das Product dividirt, so ist der Quotient 216, und also die grössere Zahl; dann $6 \times 216 = 1296$.

Sol die grössere Zahl gefunden werden, so muß in der Vorgabe angezeiget sein, wie sich solche nach dem geometrischen Verhältnis zu der kleinern Zahl verhalte (§. 274), da dann hier das Verhältnis $\frac{1}{36}$ ist.

Nimt man, wie vorhin, die Zahl $= a$, $\frac{1}{36} = b$, die grössere Zahl $= x$, und die Kleinere $= y$, so ist die Auflösung also:

$$x)\; xy = a$$

$$x)\; y = \frac{a}{x}$$

$$\frac{y}{x} = b$$

$$y = bx$$

$$\frac{a}{x} = bx$$

$$b)\; a = bx^2$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{x^2}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = x$$

Resolu-

Resolution:

$a = 1296$ mit b dividirt.

$b = \frac{1}{36})$ ———

$\sqrt{4,66,56}$ | 216 Ist die grössere Zahl, mit $\frac{1}{36}$ multiplicirt, bringt 36 zur kleinern Zahl.

```
      4 . . . .
400) 6656
     4000
     2656
     —100
420) 2556
     2520
       36
      —36
```

21) Einer kaufte etliche Centner Waar, und bezahlte 320 Thlr. dafür: werden die sämtliche Centner mit dem Preis eines Centners dividirt, so kommen zum Quotienten 5. Fr. Wie viel Centner hat er gekauft, und wie viel hat er für einen Ctr. bezahlt? Antw. 40 Ctr. gekauft, und für einen Ctr. 8 Thlr. bezahlt.

Wird nach der vorigen Gleichung das Product, nehmlich: 320 ℔ $= a$, der Quotient $5 = b$, und die grössere Zahl $= x$ genommen, so giebt es eben dieselbe Gleichung.

22) Wann der Inhalt eines Rectangulums, oder länglichten Viereks (§. 442), 504 Quadratruthen, und der Quotient, wann die längere Seite mit der Kürzern dividirt wird, $2\frac{4}{7}$ ist, so ist die Frage: Wie lang jede Seite sei? Antw. Die längere Seite ist 36, und die Kürzere 14 Ruthen.

Die Operation ist die Vorige.

II. Von den vollständigen quadratischen Gleichungen.

§. 567. Eine vollständige quadratische Gleichung ist eine solche Gleichung, darinnen die unbekante Grösse sowohl in dem zweiten, als auch in dem ersten Grad vorkomt, welche auch sonsten, entgegen der Reinen (§. 560), eine unreine oder auch zusammengesezte quadratische Gleichung genennet wird (§. 182).

§. 568. Befinden sich auf einem Theil einer solchen Gleichung bekante und unbekante Grössen untereinander, welche zusammen die Eigenschaften einer Quadratgrösse haben (§. 183 u. f.), so dürffen die bekante Grössen nicht nach der §. 489 u. f. gegebenen Anweisung abgesondert werden, sondern es wird sogleich aus sothanem Theil die Quadratwurzel gezogen, bei dem andern Theil solches angedeutet (§. 501 e), und alsdann, nachdem solche angedeutete Wurzel eingeschlossen worden (§. 191), die Absonderung verrichtet.

Z. E. Einer kaufte Waar, und bezahlte für jeden Centner so viel Gulden, als er Centner gekauft, und noch 7 fl. mehr für jeden Centner: hätte er um eben den Preis so viel Centner gekauft, als er für jeden Centner Gulden bezahlet, so wäre der Betrag dieser Waar 484 fl. gewesen. Fr. Wie viel Centner hat er gekauft?

Die unbekante Zahl der Centner oder der Gulden sei $= x$, 484 fl $= a$, und 7 fl $= b$.

$$\begin{array}{r} x + b \\ x + b \\ \hline bx + b^2 \\ x^2 + bx \end{array}$$

($x + b$), die Zahl der Gulden, so ein jeder Centner gekostet, mit der Zahl so vieler Centner multiplic.

$$\sqrt{x^2 + 2bx + b^2} = \sqrt{a}$$ (§. 179 u. f.).

$$x + b = \sqrt{a}$$ Um x allein zu bringen (§. 489), so wird b von beiderseitigen Wurzeln weggethan (s. §. 191).

$$x = \sqrt{a}) - b$$ Also ist $x =$ der Wurzel aus a, weniger b.

Resolu-

Resolution:

$$a = \sqrt{484}$$
$$\overline{22}$$
$$-b = -7$$
$$\overline{15}$$

15 Ist der Wehrt von x, welcher für die Zahl der Centner oder der Gulden genommen werden kan.

Probe:

15 fl. + 7 = 22 fl. thut 1 Ctr.
22 Centner à 22 fl. thun 484 fl.

§. 569. Gleichwie in dem Vorhergehenden (§. 562 u. f.), in Ansehung einer positiven und negativen Wurzel, zweierlei Wehrten von x statt hatten, also ist es auch hier bei den vollständigen quadratischen Gleichungen, dabei man sich nur, wann von einer angenommenen negativen Wurzel noch etwas subtrahirt werden sol, der Subtractionsregel §. 71 erinnern muß, daß solches unter + geschehe. Z. E.

23) Ein Plaz ist 15 Schuhe länger als breit: wäre solcher aber eben so breit als lang, so machte die Länge und Breite miteinander multiplicirt 2601 Schuhe. Fr. Wie breit ist dieser Plaz? Antw. 36 Schuhe.

Wann die Länge und Breite $= x$, 2601 Schuhe $= a$, und 15 Schuhe $= b$, so ist die Gleichung wie vorhin, und wird nach Extrahirung der Wurzel der Wehrt von b zu subtrahiren sein.

24) Wann ein Seehaven eben so tief als lang wäre, so würde, wann man die Länge mit der Tiefe multiplicirt, das Product 16900 Ruthen machen; da aber derselbe 120 Ruthen länger als tief ist, so ist die Frage: Wie tief der Haven sei? Antwort: 10 Ruthen.

Wird aus 16900 die Quadratwurzel gezogen, und 120 davon gethan, so kommen 10 Ruthen, woraus erhellet, daß man zu dieser Art Vorgaben keine algebraische Gleichung nöthig hat.

§. 570. Hat aber ein Theil der Gleichung nur einige Eigenschaften einer vollständigen Quadratgrösse (§. 182 u. f.), so nennet man sie unvollständig, und sothaner Theil wird, wie §. 196 u. f. gezeiget worden, zu einem vollständigen Quadrat supplirt, das Supplement dem andern Theil ebenfals beigefüget (§. 490), und die Reduction mit sothaner vollständigen Gleichung ferner wie vorhin vorgenommen.

Z. E. Einer verkaufte etliche Centner Waar, bekam für jeden Centner 8 fl. mehr als die Zahl der Centner war, und lösete 1584 fl. Fr. Wie viel Centner ist der Waar gewesen?

Die etliche Centner seien $= x$, 1584 fl. $= a$, und 8 fl. $= b$.

$x + b$ Die Zahl der etlichen Centner und 8 fl. mit der Zahl
x der Centner multiplicirt, ist gleich der Losung.

$$x^2 + bx = a$$
$$+ \tfrac{1}{4}b^2 \qquad + \tfrac{1}{4}b^2$$
$$\sqrt{x^2 + bx + \tfrac{1}{4}b^2} = \sqrt{a + \tfrac{1}{4}b^2}$$
$$x + \tfrac{1}{2}b = \sqrt{a + \tfrac{1}{4}b^2}$$
$$x = \sqrt{a + \tfrac{1}{4}b^2}) - \tfrac{1}{2}b$$

Hier wurde der erste Theil der Gleichung nach §. 198 Nro. IV. mit $\tfrac{1}{4}b^2$ supplirt, mithin solch Supplement dem andern Theil auch beigefüget.

Resolution:

$$a = 1584$$
$$\tfrac{1}{4}b^2 = 16$$
$$\sqrt{1600}$$
$$40$$
$$-\tfrac{1}{2}b = -4$$
36 Cennter.

Probe: $36 + 8 = 44$
$$36$$
$$264$$
$$132$$
$$1584$$

Nimt man die Wurzel negativ, so giebt $-40 + 4$ die Zahl -36, hierzu -8 addirt, macht -44, mit -36 multiplicirt, bringt eben die Zahl 1584.

Nota. Die Supplirung einer Quadratgrösse ist §. 196 u. f. zwar mit bekanten Grössen (§. 7) gezeiget worden, da man im Gegentheil hier unbekante Grössen hat; es macht aber dieses in der Procedur keine Aenderung, weil diese eben wie jene behandelt werden (§. 13).

25) Ein Weinhändler verkaufte für 384 fl. Wein; da er nun für jede Ohm 8 fl. mehr bekam, als er Ohm verkaufte, so ist die Frage: Wie viel es Ohm gewesen? Antw. 16 Ohm.

Hier komt die Quadratgrösse 400.

26) Ein Plaz solte mit Quadratsteinen beleget werden: addirt man die Vorhandenen und 100, und multiplicirt die Summe mit der Anzahl der Vorhandenen, so ist das Product 35136. Fr. Wie viel Steine waren vorhanden? Antw. 144.

Hier wird die Wurzel aus 37636 zu ziehen vorkommen.

Item: Zween Handelsmänner machten eine Gesellschaft, und theilten nach einiger Zeit 432 Thlr. Gewinn, davon ein jeder 6 pro Cento seines eingelegten Capitals nahme: wird beider Gewinn miteinander multiplicirt, so ist das Product gleich 46080. Fr. Was war eines jeden Zulage?

Nennet man des einen Gewinn x, so ist des andern sein Gewinn $432 - x$, und die Multiplication:

$$\begin{array}{r} 432 - x \\ x \\ \hline 432x - x^2 \end{array}$$

Dieses Product ist gleich: 46080

$432x - x^2 = 46080$ Um x^2 positiv zu machen.

$432x = 46080 + x^2$ Beide unbekante Grössen zusammen zu bringen.

$0 = 46080 + x^2 - 432x$ Die Gleichung geltend zu machen (s. §. 492).

$-46080 = x^2 - 432x$ Umgewandt (§. 498).

$x^2 - 432x = -46080$ Das Quadrat supplirt (§. 198 N. XV).

$\quad + 46656 \qquad + 46656$

$x^2 - 432x + 46656 = -46080 + 46656$

$\sqrt{x^2 - 432x + 46656} = \sqrt{576}$

$x - 216 = \sqrt{576}$

$x = \sqrt{576}) + 216$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 216 \\ \hline 240 \end{array}$$

240 Rthlr. wäre der eine Theil: wird dieser von 432 subtrahirt, bleiben 192 für den andern Theil.

Nun wird eines jeden Zulage also gefunden:

6 — 100 — 240? Antw. 4000

6 — 100 — 192? Antw. 3200

Wird die Wurzel negativ genommen, so ist

$$\begin{array}{r} -24 \\ 216 \\ \hline 192 \end{array}$$ Thlr. auch ein Theil.

Item: Ein Landkrämer nimt von einem Handelsmann in Frankfurt Waar auf Credit, zahlt in etlichen Monaten 60 Thlr. und abermahl in etlichen Monaten 64 Thlr. und verspricht, den Rest auf die nächste Messe zu zahlen. Fr. Was war der Betrag der Waare, da die Reste bei der erstern und zweiten Zahlung miteinander multiplicirt 20880 machten?

Der Betrag sei x, davon 60 subtrahirt, bleibt $x - 60$, als der erstere Rest: davon abermahl 64, macht: $x - 60 - 64$, das ist $x - 124$, als der zweite Rest.

Diese beide Reste nun miteinander multiplicirt, ist gleich 20880.

$$\begin{array}{l} x - 60 \\ x - 124 \\ \hline -124x + 7440 \\ x^2 - 60x \\ \hline x^2 - 184x + 7440 = 20880 \\ \hline x^2 - 184x = 20880 - 7440 \\ \hline x^2 - 184x = 13440 \text{ Ergänzung (§. 198 Nro. XV.)} \\ \quad + 8464 \quad + 8464 \\ \hline x^2 - 184x + 8464 = 13440 + 8464 \\ \hline \sqrt{x^2 - 184x + 8464} = \sqrt{21904} \\ \hline x - 92 = \sqrt{21904} \\ \hline x = \sqrt{21904}) + 92 \\ \quad 148 \\ \quad 92 \\ \hline \end{array}$$

240 Thlr. war der Betrag. Dann wann hievon 60 und vom Rest 64 subtrahirt werden, so erhält man die zween Reste 180 und 116, deren Product 20880 ist.

Wird die Wurzel negativ genommen, so erhält man — 56, hievon 60 und vom Rest 64 subtrahirt, bleiben die beiden Reste — 116 und — 180, deren Product ebenfals gleich 20880 ist.

Item:

Item: Wann man eine Zahl quadrirt, so macht sie eben so viel, als wann man 20 zu ihr addirt. Fr. Welches ist dieselbige?

Die unbekante Zahl sei $= x$ und $20 = a$.

$$x^2 = x + a$$

$x^2 - x = a$ Dieses wird nach §. 197 supplirt.

$$+\tfrac{1}{4} \quad +\tfrac{1}{4}$$

$$\sqrt{x^2 - x + \tfrac{1}{4}} = \sqrt{a + \tfrac{1}{4}}$$

$$x - \tfrac{1}{2} = \sqrt{a + \tfrac{1}{4}}$$

$$x = \sqrt{a + \tfrac{1}{4}}) + \tfrac{1}{2}$$

Resolution:

$$a + \tfrac{1}{4} = \sqrt{20\tfrac{1}{4}}$$

$$4\tfrac{1}{2}$$

$$+\tfrac{1}{2}$$

5 Ist die Zahl; dann $5 \times 5 = 25$, und $5 + 20$ ist auch 25.

Nimt man die Wurzel $-4\frac{1}{2}$, addirt hierzu $\frac{1}{2}$, so erhält man -4, welches auch die Zahl sein kan; dann -4×-4 ist 16, eben wie $-4 + 20 = 16$ ist.

27) Von etlichen Pfunden wurde ein jedes Pfund um so viel Kreuzer verkauft, als es Pfund waren; thut man zu der Zahl sothaner Pfunden 42, so giebt es so viel, als jene etliche Pfund an Kreuzer machen. Fr. Wie viel Pfund waren es? Antw. 7 oder -6.

Bei der Auflösung bekomt man die Wurzel aus $42\frac{1}{4}$ zu ziehen.

28) Das Quadrat einer Zahl macht eben so viel, als wann man 182 zu ihr addirt. Fr. Was ist es für eine Zahl? Antw. 14 oder -13.

Item: Wann man eine Zahl mit 16 multiplicirt, und selbige zu dem Product addirt, so wird sie um 28 mehr, als ihre Proniczahl (§. 442). Fr. Was ist solches für eine Zahl?

Die unbekante Zahl sei $= x$, die Proniczahl $= x^2 + x$, $16 = a$, und $28 = b$.

$$ax + x = x^2 + x + b,$$
$$ax = x^2 + b$$
$$-b = x^2 - ax$$
$$+\tfrac{1}{4}a^2 \qquad +\tfrac{1}{4}a^2$$
$$\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b} = \sqrt{x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2}$$
$$\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b} = x - \tfrac{1}{2}a$$
$$\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b}) + \tfrac{1}{2}a = x$$

d. i. die unbekante Zahl mit 16 multiplicirt, und alsdann zum Product addirt, ist gleich der Proniczahl + 28; dann §. 442 ist eine bekante Proniczahl $a^2 + a$, hier aber eine Unbekante $x^2 + x$. Dieses suppliren geschahe nach §. 198 Nro. IV.

Resolution:

$$\tfrac{1}{4}a^2 = 64$$
$$-b = -28$$
$$\sqrt{36}$$
$$6$$
$$\tfrac{1}{2}a = 8$$

14 Die Zahl, oder, wann die Wurzel negativ genommen wird, 2; dann $-6 + 8 = 2$.

Proben über 14

14	14
16	14
84	56
14	14
224	196
add. 14	+ 14
238	210 Die Proniczahl.
− 28	
210 Die Proniczahl.	

Proben über 2

2	2
16	2
32	4
add. 2	+ 2
34	6 Die Proniczahl.
− 28	
6 Die Proniczahl.	

29) Man quadrirte eine Zahl, addirte die Wurzel, und noch 19 darzu, und erhielte eben so viel, als wann man sie mit 20 multiplicirt, und sie noch einmahl zum Product gethan hätte. Fr. Was war es für eine Zahl? Antw. 19 oder 1.

Wann $x =$ der unbekanten Zahl, $a = 20$, und $b = 19$, so ist es die vorige Gleichung, wobei die Wurzel 9 sein wird.

30) Was ist das für eine Zahl, welche, wann man sie mit ihr selbst multiplicirt, und zum Product nebst noch 99 addirt: oder dieselbige mit 20 multiplicirt, und noch einmahl zum Product addirt, einerlei Summen bringet? Antw. Entweder 11 oder 9.

Die Gleichung ist die Vorige, wann man $20 = a$, und $99 = b$ nimt, wobei zur Wurzel 1 kommen wird, welche $+$ und $-$ sein kan.

Item: Man quadrirte eine Zahl, addirte die Wurzel darzu, und erhielte eben so viel, als wann man sie mit 20 multiplicirt, noch einmahl zum Product gethan, und 19 davon abgezogen hätte. Fr. Was war es für eine Zahl?

Zwischen dieser und den vorhergehenden Vorgaben und Gleichungen ist weiter kein Unterschied, als daß, anstatt dorten eine Zahl addirt wurde, hier eine Zahl subtrahirt wird.

Die Zahl sei $= x$, $a = 20$, und $b = 19$, so ist die Gleichung:

$$x^2 + x = ax + x - b$$

$$x^2 = ax - b$$

$$x^2 - ax = -b \quad \text{Mit } \tfrac{1}{4}a^2 \text{ supplirt (§. 198 Nro. IV.).}$$

$$+\tfrac{1}{4}a^2 \qquad +\tfrac{1}{4}a^2$$

$$\sqrt{x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b}$$

$$x - \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b}$$

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b}) + \tfrac{1}{2}a$$

Resolution:

$$\tfrac{1}{4}a^2 = 100$$
$$-b = -19$$
$$\sqrt{81}$$
$$9$$
$$\tfrac{1}{2}a = 10$$

19 Ist die Zahl; und so die Wurzel negativ genommen wird, kan sie auch 1 sein.

Item: Was ist das für eine Zahl, welche, wann man sie quadrirt, und 15 darzu thut, eben 16 mahl grösser wird?

15 sei $= a$, 16 $= b$, und die unbekante Zahl $= x$.

$$x^2 + a = xb$$
$$x^2 - xb = -a$$
$$+\tfrac{1}{4}b^2 \qquad +\tfrac{1}{4}b^2$$
$$\sqrt{x^2 - xb + \tfrac{1}{4}b^2} = \sqrt{-a + \tfrac{1}{4}b^2}$$
$$x - \tfrac{1}{2}b = \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 - a}$$
$$x = \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 - a)} + \tfrac{1}{2}b$$

Hier geschiehet das ergänzen zum Quadrat nach §. 198 Nro. IV.

Resolution:

$$\tfrac{1}{4}b^2 = 64$$
$$-a = -15$$
$$\sqrt{49}$$
$$7$$
$$\tfrac{1}{2}b = 8$$

15 Ist die Zahl, und kan ebenfals auch 1 sein.

31) Einer kaufte etliche Pfund Waar, und bezahlte für jedes Pfund so viel Kreuzer, als es Pfund waren, und für sämtliche Waar noch 40 kr. Unkosten; da er nun also 22 mahl so viel Kreuzer bezahlte, als der Pfund gewesen, so ist die Frage: Wie viel Pfund er gekauft? Antw. 20 ℔. oder auch 2 ℔.

Hier komt die Wurzel aus 81 zu ziehen vor.

32) Als

32) Als ein Schulmeister um die Anzahl seiner Schüler gefragt wurde, antwortete er: Wann man die Anzahl derselben quadrirt, und zu sothanem Quadrat 54 addirt, so komt 55 mahl so viel, als deren sind. Fr. Wie viel hat er Schüler gehabt? Antw. 54. Es kan aber auch nur Einer gewesen sein.

Hier komt vor, aus $702\frac{1}{4}$ die Quadratwurzel zu ziehen.

§. 571. **Ist das Quadrat der unbekanten Grösse mit einer bekanten Grösse multiplicirt, so wird ein jedes Glied der Gleichung mit sothaner bekanten Grösse (gedachtes multiplicirte Quadratglied nicht ausgeschlossen), erst multiplicirt, und alsdann die unbekante Grösse, wie vorhin, zu einer vollständigen Quadratgrösse gemacht.**

Z. E. Ein Weinhändler verkaufte Wein, und zwar jede Ohm um eben so viel Thaler, als es Ohm waren: wäre des Weins 4 Ohm weniger als fünfmahl der Ohmen gewesen, so hätte er 2784 Thlr. dafür bekommen. Fr. Wie viel war des Weins, der verkauft worden?

2784 Thlr. seien $= a$, 4 Ohm $= b$, die Zahl 5 $= c$, und die Zahl der Ohmeu $= x$.

$$xc - b,$$ d. i. 5 mahl der unbekanten Ohmen, weniger 4 Ohm,
$$x$$ mit der Zahl der unbekanten Ohmen multiplicirt, ist $= a$.

$$x^2c - bx = a$$

$$x^2c^2 - cbx = ca$$ Hier wurde um deswillen mit c gegrössert,
$$+\tfrac{1}{4}b^2 \qquad +\tfrac{1}{4}b^2$$ um das erste Glied gänzlich in die zweite Potenz zu erheben, und Eigenschaften zum Quadrat zu erhalten (§. 183 u. f.), worauf nach §. 198 Nro. XVI. supplirt werden konte.

$$\sqrt{x^2c^2 - cbx + \tfrac{1}{4}b^2} = \sqrt{ca + \tfrac{1}{2}b^2}$$

$$xc - \tfrac{1}{2}b = \sqrt{ca + \tfrac{1}{4}b^2}$$

$$c)\ xc = \sqrt{ca + \tfrac{1}{4}b^2)} + \tfrac{1}{2}b$$

$$x = \frac{\sqrt{ca + \tfrac{1}{4}b^2)} + \tfrac{1}{2}b}{c}$$

Resolution:

$ac = 13920$
$\frac{1}{4}b^2 = 4$
$\sqrt{13924}$
118
$\frac{1}{2}b = 2$
$c = 5)\ 120$

24 Ohm sind verkauft worden.

Probe:

24 Ohm.	24 Ohm.
24 Thlr.	5
96	120
48	— 4
576 Thlr.	116

Nun sage:

Ohm. Thlr. Ohm.
24 —— 576 —— 116? Antw. 2784 Thlr.

Nota. Wann, nachdeme von der erhaltenen Wurzel etwas addirt oder subtrahirt worden, wie vorhin geschehen, noch ferner procedirt wird, so findet keine negative Wurzel statt.

33) Einer kaufte Waar, und bezahlte für jeden Centner so viel Gulden, als der sämtlichen Centner waren: wären derselben noch 4 mahl so viel, weniger 3 Ctr. gewesen, so hätten 297 fl. bezahlt werden müssen. Fr. Wie viel ist der Waar gewesen? Antw. 9 Ctr.

Die Gleichung ist die Vorige, dabei man zur Wurzel $34\frac{1}{2}$ erhalten wird.

34) Was ist das für eine Zahl, welche, wann man sie mit 8 multiplicirt, und vom Product 6 subtrahirt, den Rest wiederum mit sothaner Zahl, von welcher die Frage ist, multiplicirt, 1710 zum Product bringet? Antw. 15.

Die Gleichung ist wie vorhin, und die Wurzel wird sein 117.

Item:

Item: Ein General liesse einem Chor Dragoner 1200 fl. und einem Chor Husaren eben so viel, wegen ihres Wohlverhaltens, austheilen; weil nun der Husaren 40 weniger, als der Dragoner waren, so bekam auch jeder 5 fl. mehr, als ein Dragoner. Fr. Wie viel sind es Dragoner und Husaren gewesen?

1200 fl. seien $= a$, 40 Dragoner mehr $= b$, 5 fl $= c$, und die unbekante Zahl der Husaren $= x$.

$$\frac{a}{x} = \frac{a}{x+b} + c,$$ d. i. 1200 fl. mit der Zahl der Husaren dividirt, ist gleich 1200 fl. mit der Zahl der Dragoner, d. i. $x+b$, getheilt, und noch 5 fl. darzu.

$$a = \frac{ax}{x+b} + xc$$

$$ax + ab = ax + x^2c + bxc$$

$$ab = x^2c + bxc$$ Um Eigenschaften einer Quadratgrösse zu bekommen, so wird mit c gegrössert.

$$abc = x^2c^2 + bxc^2$$

$$x^2c^2 + xbc^2 = abc$$ Mit $\frac{1}{4}b^2c^2$ supplirt (§. 198 Nro. XVI.).

$$+\tfrac{1}{4}b^2c^2 \qquad +\tfrac{1}{4}b^2c^2$$

$$\sqrt{x^2c^2 + xbc^2 + \tfrac{1}{4}b^2c^2} = \sqrt{abc + \tfrac{1}{4}b^2c^2}$$

$$xc + \tfrac{1}{2}bc = \sqrt{abc + \tfrac{1}{4}b^2c^2}$$

$$c)\ xc = \sqrt{abc + \tfrac{1}{4}b^2c^2)} - \tfrac{1}{2}bc$$

$$x = \frac{\sqrt{abc + \tfrac{1}{4}b^2c^2)} - \tfrac{1}{2}bc}{c}$$

Resolution:

$$abc = 240000$$
$$\tfrac{1}{4}b^2c^2 = 10000$$
$$\sqrt{250000}$$
$$500$$
$$-\tfrac{1}{2}bc = -100$$
$$c = 5)\ 400$$

80 Husaren.
40 Dragoner mehr.

120 Dragoner.

Da man nun hier den Wehrt von x weiß, nehmlich, daß er $= 80$ sei, so kan man die Gleichung zur Probe und zum richtigen Begrif derselben in gemeinen Ziffern vorstellen:

$$\frac{1200}{80} = \frac{1200}{80+40} + 5$$

$$\frac{1200}{80} = \frac{1200}{120} + 5$$

$$15 = 10 + 5$$

$$15 = 15$$

35) Ein Handelsmann kaufte zweierlei Waar, und zwar von N° I, 60 ℔. mehr, als von N° II: da er nun für eine Waar so viel, als für die andere, nehmlich für jede 240 fl. und für 1 ℔. von N° II, 40 kr. mehr, als für 1 ℔. von N° I. bezahlete, so fragt sichs: Wie viel Pfund er von jeder Sorte gekauft habe? Antw. Von N° I, 180 ℔. und von N° II, 120. ℔.

Wird $a = 240$, $b = 60$, $c = 40$ kr. oder $\frac{2}{3}$ fl. (§. 39), und $x =$ die unbekanten Pfund genommen, und man procediret eben wie vorhin, so komt bei der Resolution die Wurzel aus 10000 zu ziehen vor, wobei man nur das multipliciren und dividiren mit $\frac{2}{3}$ wohl beobachten muß, da dann die Zahl 180 kommen wird.

NB. Wann man die 40 kr. beibehalten wil, so müssen auch die 240 fl. darzu resolviret werden, in welchem Fall es aber gar zu grosse Zahlen geben wird.

36) An einem Vestungsbau arbeiteten zwo Parthien Arbeiter an den Plätzen A und B, davon die eine Parthie, so an A arbeitete, aus 20 Mann mehr bestunde, als die Parthie, welche an B arbeitete: diese hatten aber schon länger als jene gearbeitet, dahero auch der Lohn eines Arbeiters an B 10 fl. mehr, als eines Arbeiters an A, machte, der sämtliche Lohn aber einer jeden Parthie war gleich, nehmlich 2400 fl. Fr. Aus wie viel Mann hat jede

Parthie

Parthie bestanden? Antw. An A aus 80, und an B aus 60 Mann.

Wann $a = 2400$, $b = 20$, und $c = 10$, so erhält man die vorige Gleichung, und bei der Resolution 700 zur Quadratwurzel.

§. 572. Komt das Quadrat der unbekanten Grösse negativ, so wird, weil eine negative Grösse kein Quadrat sein kan (§. 181), die Gleichung NB. beiderseits unter verkehrten Zeichen umgewandt, da man dann dasselbige positiv erhält, ohne die Gleichung zu zerrütten (§. 497).

Z. E. Einer kaufte 15 ℔. Pfeffer und 300 ℔. Coffeebohnen, giebt für jedes Pfund Pfeffer 15 kr. d. i. $\frac{1}{4}$ fl. mehr, als für 1 ℔. Coffeebohnen: da nun sämtlicher Pfeffer so viel Gulden machte, als die Quadratwurzel aus demjenigen, was sämtliche Coffeebohnen an Gulden thaten, war, so ist die Frage: Wie viel jede Waare betragen?

Wann 15 ℔ $= a$, 300 ℔ $= b$, $\frac{1}{4}$ fl $= c$, und der Betrag des Pfeffers $= x$, so ist die Gleichung:

$$\frac{x}{a} - \frac{x^2}{b} = c,$$ d. i. Der Betrag des Pfeffers mit 15 ℔. dividirt, weniger das Quadrat vom Betrag des Pfeffers mit 300 dividirt, ist gleich $\frac{1}{4}$ fl.

$$x - \frac{ax^2}{b} = ac$$

$$bx - ax^2 = abc$$

$$-abc = ax^2 - bx$$ Um Eigenschaften eines Quadrats zu bekommen, wird mit a gegrössert.

$$-a^2bc = a^2x^2 - abx$$

$$+\tfrac{1}{4}b^2 \qquad +\tfrac{1}{4}b^2$$ Diese Ergänzung s. §. 198 Nro. XV.

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 - a^2bc} = \sqrt{a^2x^2 - bax + \tfrac{1}{4}b^2}$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 - a^2bc} = ax - \tfrac{1}{2}b$$

$$a)\ \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 - a^2bc)} + \tfrac{1}{2}b = ax$$

$$\frac{\sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 - a^2bc)} + \tfrac{1}{2}b}{a} = x$$

Resolu-

Resolution:

$$\tfrac{1}{4}b^2 = 22500$$
$$-a^2cb = -16875$$
$$\sqrt{5625}$$
$$75$$
$$\tfrac{1}{2}b = 150$$
$$a = 15)\,225$$

15 fl. kostete der Pfeffer; wird diese Zahl quadrirt, so komt auch der Betrag der Coffeebohnen, nehmlich 225 fl. mithin 1 ℔. Coffeebohnen 45 kr.

37) Ein Commissionair hatte 450 Ehlen Zeuge abgesezet, und bekam deswegen ein Duzend Spanische Röhre zum Präsent: da er nun ein jedes Rohr 30 kr. höher schäzte, als er eine Ehle Zeug verkauft hatte, folglichen die Röhre so viel Gulden machten, als die Quadratwurzel aus dem Betrag der Ehlen Gulden machte, so ist die Frage: Wie hoch die Röhre geschäzet worden, und wie viel also der Betrag der Ehlen gewesen? Antw. Die Röhre sind 30 fl. geschäzet worden, und der Betrag der Ehlen war 900 fl.

Nimt man hier $12 = a$, $450 = b$, $\tfrac{1}{2}$ fl. $= c$, und den Betrag der Röhre $= x$, so bekomt man die Wurzel aus 18225 zu ziehen.

38) Mit 605 Stük Geldspecien, und noch 5 Stük Goldmünzen, von welchen ein jedes Stük 6 fl. mehr machte, als ein Stük von jenen, wurde eine bestimte Summe Gulden bezahlet: wird die Zahl der Gulden, so die 5 Stüke machen, mit ihr selbst multiplicirt, so komt die Summe der erstern Stüke. Fr. Was war der Betrag von jeder Sorte? Antw. Von der Erstern 3025 fl. und der Leztern 55 fl.

Wann $5 = a$, $605 = b$, und $6 = c$, genommen, und wie vorhin procediret wird, so bekomt man die Quadratwurzel aus $756\tfrac{1}{4}$ zu ziehen.

§. 573.

§. 573. Befindet sich in einer Gleichung, nebst dem Quadrat der unbekanten Grösse, die unbekante Grösse noch zweimahl nach dem ersten Grad, so ist es ein Zeichen, daß nach §. 192 die Wurzel drei Glieder haben müsse: dahero derjenige Theil der Gleichung, welcher die unbekante Grössen enthält, wie §. 200 u. f. zu einer vollständigen Quadratgrösse supplirt, und wie vorhin verfahren wird.

Z. E. Einer hatte ein Stük Zeug, rechnete von der Helfte desselben jede Ehle um so viel Thaler und noch 2 Thlr. als $\frac{1}{3}$ Ehlen von sothaner Helfte Ehlen waren; von der andern Helfte aber jede Ehle um 4 Thlr. da nun also sämtliche Zeuge $106\frac{1}{3}$ Thlr. kamen, so fragt sichs: Wie viel Ehlen sothanes Stük gehalten?

$106\frac{1}{3}$ Thlr. seien $= a$, 4 Thlr. $= b$, 2 Thlr. $= c$, und die Ehlen $= x$.

Daher ist die Helfte der Ehlen $\frac{1}{2}x$.

Ein Drittel von diesem $\frac{1}{2}x = \frac{1}{6}x$.

Um so viel, und noch 2 Thlr. oder c, darzu, d. i. $\frac{1}{6}x + c$, wurde die Helfte verkauft.

Wird nun $\frac{1}{2}x$ mit diesem $\frac{1}{6}x + c$, oder, welches einerlei, dieses mit jenem, multiplicirt, so komt: $\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{2}cx$, als der Betrag der einen Helfte.

Der Betrag der andern Helfte ist $\frac{1}{2}xb$, d. i. die Helfte Ehlen mit 4 Thlr. multiplicirt.

Dessen zufolge ist nun die Gleichung:

$$\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{2}xc + \frac{1}{2}xb = a$$

$$x^2 + 6xc + 6xb = 12a$$

$$+ 9c^2 + 18cb + 9b^2$$ Das Supplement für jeden Theil nach §. 202 Nro. II.

$$\sqrt{x^2 + 6xc + 6xb + 9c^2 + 18cb + 9b^2} = 12a + 9c^2 + 18cb + 9b^2$$

$$x + 3c + 3b = \sqrt{12a + 9c^2 + 18cb + 9b^2}$$

$$x = \sqrt{12a + 9c^2 + 18cb + 9b^2}) - 3c - 3b.$$

Resolu-

Resolution:

$$\begin{aligned} 12a &= 1276 \\ 18cb &= 144 \\ 9c^2 &= 36 \\ 9b^2 &= 144 \\ \hline & \sqrt{1600} \\ \hline & 40 \end{aligned}$$

$$-\left\{\begin{aligned} 3c &= 6 \\ 3b &= 12 \end{aligned}\right\} = -\,18$$

22 Ehlen hat das Stük gehalten.

Probe:

Die Helfte Ehlen sind 11, und $\frac{1}{3}$ davon sind $3\frac{2}{3}$ Thlr.

Hierzu noch 2 Thlr. so ist der Regeldetrisaz:

1 Ehl —— $5\frac{2}{3}$ Thlr. —— 11 Ehl? Antw. $62\frac{1}{3}$ Thlr.
Hierzu für 11 Ehl à 4 Thlr. thut „ „ 44

$106\frac{1}{3}$ Thlr.

39) Von einem Faß Wein wird die Helfte der Maasen so viel Bazen, und noch 4 Bazen darzu, gerechnet, als ein Viertel dieser Helfte Maasen sind; von der andern Helfte aber die Maas um 12 Bazen: da nun der Betrag 91 Thlr. 2 kr. ist, so fragt sichs: Wie viel Maas das Faß halte? Antw. 128 Maas.

Weil in dem vorhergehenden Exempel $\frac{1}{3}$ von der Helfte, hier aber $\frac{1}{4}$ von der Helfte, angegeben wird, so sind diese beide Vorgaben nicht ganz gleichförmig, folglichen können jene Buchstaben nicht schlechterdings zur Resolution dieser Vorgabe genommen werden, sondern man muß hier die Auflösung besonders verrichten, welches aber doch nach jener Anweisung geschiehet.

Demnach sei hier 91 Thlr. 2 kr. das sind 2048 Bazen $= a$, 12 Bz. $= b$, 4 Bz. $= c$, und die Maasen $= x$,

Mithin ist die Helfte der Maasen $\frac{1}{2}x$, und $\frac{1}{4}$ hievon, nemlich $\frac{1}{8}x$, und 4 Bz. d. i. $\frac{1}{8}x + c$, thut eine Maas von der Helfte.

Die Helfte der Maasen, d. i. $\frac{1}{2}x$, mit dem Preis, d. i. $\frac{1}{8}x + c$, multiplicirt, komt $\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2}xc$, als der Betrag von der einen Helfte.

Die

Die andere Helfte zu 12 Bz. ist also: $\frac{1}{2}xb$, worauf nun die Gleichung also gemacht wird:

$$\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2}xc + \frac{1}{2}xb = a.$$

Nach dem grössern dieser Glieder wird ferner wie vorhin verfahren, wobei die Quadratwurzel 192 kommen, und von welcher $4c$ und $4b$ abzuziehen sein wird.

Die Probe wird alsdann sein:

Die Helfte Maas sind 64, und $\frac{1}{4}$ davon sind 16 Bz.

Hierzu noch 4 Bz. so ist der Regeldetrisaz:

Maas. Bz. Maas.

1 —— 20 —— 64? Antw. 1280 Bz.

Hierzu für 64 Maas à 12 Bz? 768

2048 Bz. welche 91 Thlr. 2 kr. thun.

40) Von der Helfte einer Parthie Waar kam ein Centner so viel Gulden, und noch 6 fl. mehr, als $\frac{1}{5}$ von der Helfte Centner that; die andere Helfte aber wurde zu 12 fl. der Centner gerechnet, daß also der Betrag 1040 fl. war. Fr. Wie viel waren es Centner? Antw. 80 Ctr.

1040 fl. seien $= a$, 12 fl $= b$, 6 fl $= c$, und die Centner $= x$, so ist die Gleichung nach dem grössern:

$$x^2 + 10xc + 10xb = 20a.$$

Diese Gleichung nach §. 202 Nro. II. zum vollständigen Quadrat gemacht, die Wurzel ausgezogen, welche sein wird: $x + 5b + 5c$, und hernach gewöhnlich resolvirt, wobei man die Wurzel 170, und nach Abzug $5b$ und $5c$ das Facit erhalten wird.

Bei der Probe heisset es wie vorhin:

Die Helfte Centner sind 40, und $\frac{1}{5}$ davon sind 8 u. s. f.

Wil man aber dennoch über diese Fälle eine allgemeine Regel haben, so ist aus dem Nenner des Bruchs von x^2 allezeit der vierte Theil die Zahl für b und c, solche quadrirt, ist die Zahl für b^2 und c^2, und das Duplum für bc.

Z. E. Bei vorstehender Vorgabe ist der Bruch $\frac{1}{20}$, mithin ist $20 = a$, $25 = b^2$, $25 = c^2$, $50 = bc$, $b = 5$, und $c = 5$.

Da die Regel de Tri vorher nöthig ist:

Item: 32 Ehlen wurden um 42 Thlr. verkauft, und so viel pro Cento gewonnen, als 4 Ehlen nach dem Einkauf gestanden. Fr. Wie ist die Ehle nach dem Einkauf bezahlt worden?

Erstlich sage: Die Ehle sei um x Thlr. gekauft worden:

$$100 - 4x - x$$
$$\frac{x}{4x^2}$$

$\frac{4x^2}{100}$, d. i. reducirt $\frac{1}{25}x^2$, als der Profit an einer Ehle.

Dieser Profit wird nun zu x, als dem Einkaufspreis, gethan, so hat man den Verkaufspreis, also:

$$\frac{1}{25}x^2 + x$$

welcher dem bestimten Verkauf gleich sein muß.

Dahero sage abermahl:

32 Ehl — 42 Thlr. — 1 Ehl?

$1\frac{10}{32}$, d. i. $1\frac{5}{16}$ Thlr. ist die Ehl verkauft worden.

Nun ist die Gleichung, um den Wehrt von x zu bekommen:

$\frac{1}{25}x^2 + x = 1\frac{5}{16}$ Thlr. mit 25 gegrössert.

$x^2 + 25x = 32\frac{13}{16}$ Thlr. mit 16 gegrössert.

$16x^2 + 400x = 525$ Ergänzung des Quadrats §. 198 Nro. XV.

$+ 2500 \qquad + 2500$

$$16x^2 + 400x + 2500 = 525 + 2500$$
$$\sqrt{16x^2 + 400x + 2500} = \sqrt{3025}$$
$$4)\ 4x + 50 = \sqrt{3025}$$
$$x = \frac{\sqrt{3025}) - 50}{4}$$

Resolu-

Resolution: $\sqrt{3025}$

$$\begin{array}{r} 55 \\ -50 \\ \hline 4)\;5 \end{array}$$

$1\frac{1}{4}$ Thlr. hat die Ehle einkaufs gestanden.

Probe: 1 Ehl —— $1\frac{1}{4}$ Thlr. —— 32 Ehl?

40 Thlr. mithin ist der Profit 2 Thlr.

40 Thlr. —— 2 Thlr. —— 100 Thlr?

5 Thlr. wurden für 4 Ehlen bezahlt.

Item: Ein Handelsmann verkauft den Centner Waar um $28\frac{1}{2}$ Thlr. und verliert pro Cento $\frac{1}{6}$ so viel, als der Centner gekostet. Fr. Wie theuer hat er denselben eingekauft?

Der Einkaufspreis sei $= x$ Thlr. so heist es nach der Regel de Tri:

100 Thlr. —— $\frac{1}{6}x$ Thlr. —— x Thlr?

$$\begin{array}{r} 6 \\ \hline 600 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x \\ \hline \dfrac{x^2}{600} \end{array}$$

Diese von x, bleiben $x - \frac{x^2}{600}$, welche dem Verkaufspreis gleich sind:

$x - \frac{x^2}{600} = 28\frac{1}{2}$ Mit 600 gegrössert.

$600x - x^2 = 17100$ Um x^2 positiv zu machen.

$600x = 17100 + x^2$ Um die unbekante Glieder zusammen zu bringen.

$0 = 17100 + x^2 - 600x$ Diese Gleichung ist nichts, s. §. 492, und wird geltend gemacht (§.610).

$-17100 = x^2 - 600x$ Umgewandt (§. 498).

$x^2 - 600x = -17100$ Das Quadrat wird supplirt (§. 198 Nro.XV.).

$+90000 \qquad +90000$

$x^2 - 600x + 90000 = -17100 + 90000$

$\sqrt{x^2 - 600x + 90000} = \sqrt{72900}$

$x - 300 = \sqrt{72900}$

$x = \sqrt{72900}) + 300$

$$\begin{array}{r} x = 270 \\ +300 \\ \hline 570 \end{array}$$

570 Thlr. wäre der Centner eingekauft worden.

Da nun $\frac{1}{6}$ aus 570, 95 ist, so würde so viel pro Cento verlohren, mithin für 100 nur 5, und für 570 nur $28\frac{1}{2}$ Thlr. wieder eingenommen; dann

100 —— 5 —— 570? Antw. $28\frac{1}{2}$ Thlr.

Wird aber die Wurzel 270 negativ genommen, so ist der Einkauf 30 Thlr. und der Sache gemäser (s. §. 571 Nota); dann

100 —— 95 —— 30? Antw. $28\frac{1}{2}$ Thlr.

Item: Ein Handelsmann kaufte von A und B 20 Schok Leinwand, und gab für jede Parthie 120 Thlr. für das Schok von B aber 5 Thlr. mehr, als für das Schok von A. Fr. Wie viel hat er für das Schok von jeder Parthie bezahlt?

Erstlich sage: x Thlr. —— 1 Schok —— 120 Thlr?

$\frac{120}{x}$ Schok.

Ferner: $x + 5$ Thlr. —— 1 Schok —— 120 Thlr?

$\frac{120}{x+5}$ Schok.

Diese beide Faciten werden nun addirt (§. 138):

$$\frac{120}{x} \;.\; x+5 \;.\; 120x + 600 \qquad (x^2 + 5x)$$

$$\frac{120}{x+5} \;.\; x \;.\; 120x$$

$$\text{Summe: } \frac{240x + 600}{x^2 + 5x}$$

Nun ist die Gleichung:

$$\frac{240x + 600}{x^2 + 5x} = 20 \text{ Mit } x^2 + 5x \text{ gegrösset.}$$

$$240x + 600 = 20x^2 + 100x \text{ Umgewandt.}$$

$$20x^2 + 100x = 240x + 600$$

$$20x^2 = 240x + 600 - 100x$$

$$20x^2 = 140x + 600$$

$$20)\ 20x^2 - 140x = 600$$

$$x^2 - 7x = 30 \text{ Supplirung (§. 198 Nro. XV.).}$$

$$+\tfrac{49}{4} \qquad +\tfrac{49}{4}$$

$$x^2 - 7x + \tfrac{49}{4} = 30 + \tfrac{49}{4} \text{ Mit 4 gegrösset.}$$

$$4)\ 4x^2 - 28x + 49 = 120 + 49$$

$$x^2 - 7x + 12\tfrac{1}{4} = 30 + 12\tfrac{1}{4}$$

$$\sqrt{x^2 - 7x + 12\tfrac{1}{4}} = \sqrt{42\tfrac{1}{4}}$$

$$x - \tfrac{7}{2} = \sqrt{42\tfrac{1}{4}}$$

$$x = \sqrt{42\tfrac{1}{4}}) + \tfrac{7}{2}$$

$$\tfrac{169}{4} \mid \tfrac{13}{2}$$

$$+\tfrac{7}{2}$$

$\frac{20}{2}$ Das sind 10 Thlr. für 1 Schok von A, mithin 15 Thlr. für 1 Schok von B.

Nimt man die Wurzel negativ, d. i. $-6\frac{1}{2}$, und addirt $3\frac{1}{2}$, so ist die Summe -3 Thlr. Diese bringen den Mangel von 40 Schok von A; addirt man zu -3 Thlr. 5 Thlr. so ist die Summe 2 Thlr. welche 60 Schok machen, hiervon den Mangel von 40 Schok, bleiben 20 von B, welches zwar richtig, aber nicht practicabel ist.

Item: Ein Handelsmann kauft Ingber und Pfeffer, ist des Pfeffers 64 ℔. mehr, als des Ingbers, giebt allemahl für $\frac{2}{3}$ ℔. Pfeffer so viel, als für $\frac{5}{6}$ ℔. Ingber, und für jedes Pfund Ingber $\frac{1}{16}$ mahl so viel Groschen, als des Ingbers sämtliche Pfund sind, und beträgt das Gewürz zusammen $183\frac{1}{3}$ Thlr. den Thlr. zu 24 Groschen gerechnet. Fr. Wie viel ist jedes Gewürz insbesondere?

Die Pfund des Ingbers seien $= x$, so sind die Pfund des Pfeffers $= x + 64$. Dahero ist der sechszehnte Theil von den Pfunden des Ingbers $= \frac{x}{16}$, folglichen der Preis von 1 ℔. Ingber $= \frac{x}{16}$, oder, welches einerlei: $\frac{1}{16} x$ Groschen;

Dann x durch 16 dividirt ist $= x$ mit $\frac{1}{16}$ multiplicirt (s. §. 146).

Nach diesem Preis wird der Betrag des Ingbers also berechnet:

℔. Ingber. Groschen. ℔. Ingber.

$$1 \text{———} \frac{x}{16} \text{———} x$$

$$16$$

$$\frac{xx}{16}, \text{ oder: } \frac{x^2}{16},$$ der Betrag von x ℔. Ingber.

Nun muß gesucht werden, was $\frac{5}{6}$ ℔. Ingber thun, weil $\frac{2}{3}$ ℔. Pfeffer so viel gelten sollen.

℔. Ingber. Groschen. ℔. Ingber.

$$1 \text{———} \frac{x}{16} \text{———} \frac{5}{6}$$

$$96 \qquad\qquad \frac{5}{}$$

$\frac{5x}{96}$ Groschen thun $\frac{5}{6}$ ℔. Ingber, und eben so viel $\frac{2}{3}$ ℔. Pfeffer.

Nach diesem Preis wird der Betrag des Pfeffers also berechnet:

℔. Pfeffer. Groschen. ℔. Pfeffer.

$$\frac{2}{3} \text{———} \frac{5x}{96} \text{———} x + 64$$

$$\qquad\qquad 5x \qquad\qquad 5x$$

Divisor $\frac{2}{3}$, umgew. $\frac{3}{2}$, $$\frac{5x^2 + 320x}{96}$$

$$\frac{15x^2 + 960x}{192}$$ Der Betrag vom Pfeffer.

Nun

Nun ist die Summe dieser beiden Beträge gleich $183\frac{1}{3}$ Thlr. oder 4400 Gr. und die Gleichungsformel also:

$$\frac{15x^2 + 960x}{192} + \frac{x^2}{16} = \frac{4400\text{ Gr.}}{192}$$

Um die Brüche wegzuschaffen, werden beide Theile mit 192 gegrösset.

$15x^2 + 960x + 12x^2$; dann 192 mahl $\frac{x^2}{16}$ giebt $12x^2$, welche zu $15x^2$ addirt werden.

$$3)\ 27x^2 + 960x = 844800$$

$$9x^2 + 320x = 281600$$

Um die Quadratwurzel ausziehen zu können, wird die Gleichung zum Quadrat suppl. (§. 198 No. XV).

$$+ 2844\tfrac{4}{9} \quad + 2844\tfrac{4}{9}$$

$$\sqrt{9x^2 + 320x + 2844\tfrac{4}{9}} = \sqrt{284444\tfrac{4}{9}}$$

$$3)\ 3x + 53\tfrac{1}{3} = \sqrt{284444\tfrac{4}{9}}$$

$$x = \frac{\sqrt{284444\frac{4}{9}} - 53\frac{1}{3}}{3}$$

Resolution:

$$\sqrt{284444\tfrac{4}{9}} = \sqrt{\tfrac{2560000}{9}} \text{ ist } \tfrac{1600}{3}\text{, reducirt } 533\tfrac{1}{3}$$

$$-\ 53\tfrac{1}{3}$$

$$3)\ 480$$

160 ℔. Ingber sind es, und des Pfeffers 64 ℔. mehr, mithin 224 ℔. desselben.

Probe:

℔. Ingber. Groschen, als $\frac{1}{16}$ von 160

1 —— 10 —— $\frac{5}{6}$ ℔. Ingber?

$8\frac{1}{3}$ Gr.

℔. Pfeffer. Groschen. ℔. Pfeffer?

$\frac{2}{3}$ —— $8\frac{1}{3}$ —— 224

2800 Gr.

℔. Ingber. Groschen. ℔. Ingber?

1 —— 10 —— 160

1600 Gr. + 2800 Gr.

Summe: 4400 Gr. oder $183\frac{1}{3}$ Thlr.

§. 574. Gleichwie bei den reinen quadratischen Gleichungen zuweilen mehr als eine Gleichung angestellet werden muß (§. 566), also geschiehet es auch hier, wobei man eben das zu beobachten hat, was dorten desfals gelehret worden.

Z. E. Wann man von zwo Zahlen die Grössere mit der Quadratwurzel der Kleinern multiplicirt, so komt zum Product 18; und wann die kleinere Zahl mit der Quadratwurzel der grössern Zahl multiplicirt wird, komt zum Product 12. Fr. Welches sind sothane Zahlen?

Die grössere Zahl sei $= x$, die Kleinere $= y$, die Zahl $18 = a$, und die Zahl $12 = b$.

$x\sqrt{y} = a$, d. i. die grössere Zahl mit der Wurzel der Kleinern multiplicirt (§. 234), ist gleich 18.

$y)\ x^2 y = a^2$ Um die Gleichung vom Wurzelzeichen zu befreien, wurden die Factoren (§. 180) und der andere Theil der Gleichung quadrirt.

$$x^2 = \frac{a^2}{y}$$

$y\sqrt{x} = b$, d. i. die kleinere Zahl mit der Wurzel der Grössern multiplicirt, ist gleich 12.

$y^2)\ y^2 x = b^2$ Das Grössern wie vorhin.

$x = \frac{b^2}{y^2}$ Um noch einen Wehrt von x^2 zu bekommen, wurde erst mit y^2 dividirt, und nun muß x zum zweiten, mithin der andre Theil zum vierten Grad erhaben werden (§. 28).

$$x^2 = \frac{b^4}{y^4}$$

Diese beede erhaltene Wehrten vom Quadrat der grössern Zahl werden nun in eine Gleichung gebracht, und getrachtet, die kleinere Zahl y allein zu bringen, und somit ihren Wehrt zu erhalten.

$\frac{b^4}{y^4} = \frac{a^2}{y}$ Diese beide Theilen gleich gegrössert, so kommen die Brüche weg (§. 128).

$$y)\ y b^4 = a^2 y^4$$

$$a^2)\ b^4 = a^2 y^3$$

$$\frac{b^4}{a^2} = y^3$$

Resolu-

Resolution:

$b^4 = 20736$

$a^2 = 324)$ ——

$\sqrt[3]{64}$ Ist gleich der Potenz y^3, folglichen muß die Cubicwurzel daraus gezogen werden.

4 Ist die kleinere Zahl, wird mit deren Wurzel, nemlich 2, das Product 18 dividirt, so ist der Quotient, d. i. 9, die grössere Zahl.

41) Man hat zween Pläze in Quadratruthen abgetheilet: rechnet man eine jede Quadratruthe des grössern Plazes so viel Gulden, als eine Seite des kleinern Plazes Ruthen lang ist, so ist der Betrag des grössern Plazes 48 fl. rechnet man aber eine jede Quadratruthe des kleinern Plazes so viel Gulden, als eine Seite des grössern Plazes lang ist, so ist der Betrag 36 fl. Fr. Wie viel Ruthen hält ein jeder dieser Pläzen? Antw. Der grössere Plaz hält 16, und der Kleinere 9 Ruthen.

Wann, wie vorhin, die unbekante grössere Zahl $= x$, und die Kleinere $= y$, die Zahl $48 = a$, und $36 = b$, genommen wird, so ist die Gleichung und Reduction wie vorhin.

42) Zween unterschiedene Pläze sind mit Quaderplatten beleget, von welchen man weiß, daß, wann die sämtliche Platten des grössern Plazes so oft genommen oder multiplicirt werden, als auf einer Seite des kleinern Plazes Platten liegen, 1440 kommen, und so die sämtliche Platten des kleinern Plazes so oft genommen oder multiplicirt werden, als auf einer Seite des grössern Plazes liegen, 1200 kommen. Fr. Wie viel liegen auf jedem dieser beeden Pläzen Platten? Antw. Auf dem Grössern 144, und auf dem Kleinern 100.

Die Gleichung ist die Vorige, wann die Grössen gehörig mit Buchstaben bezeichnet werden.

Nota. Obzwar bei quadratischen Gleichungen die Allgemeinheit der Buchstaben, wie §. 561 angemerket

 worden,

worden, eigentlich keine statt findet, so kan man sich doch auch allgemeiner Auflösungen derselben bedienen, wobei man sich aber alsdann, wie §. ibid. mit Irrational- oder gar eingebildeten Antworten begnügen muß, worzu folgendes Exempel dienen sol:

Für etliche Centner Waar wurden 96 Thlr. bezahlt: wird die Zahl der Thaler, welche für einen Centner gegeben worden, und die Zahl der Centner quadrirt, so ist die Summe beider Quadraten 208. Fr. Wie viel waren der Centner, und wie viel ist für einen bezahlt worden?

Werden die Centner $= x$, und der Preis von einem $= y$, genommen, so ist $xy = 96$, und $x^2 + y^2 = 208$, und also die Gleichung:

$$x^2 + y^2 = 208$$

Da der erste Theil dieser Gleichung zwei Quadratglieder enthält, so kan er durch das zweifache Zwischenproduct, d. i. $2xy$ (§.184), zu einem vollständigen Quadrat supplirt werden (§.572); und weil die Helfte von diesem Supplement, d. i. $xy = 96$ ist, so wird dem andern Theil der Gleichung, anstatt des doppelten Zwischenproducts in Buchstaben, dasselbe in Zahlen, d. i. zweimahl 96, beigefüget, und die Gleichung erhalten:

$$x^2 + 2yx + y^2 = 208 + 192$$

$$\sqrt{x^2 + 2yx + y^2} = \sqrt{400}$$

$$x + y = 20$$

Um y auch negativ zu bekommen, wird eine zweite Gleichung angestellet, welcher das doppelte Zwischenproduct negativ beigefüget wird:

$$x^2 - 2xy + y^2 = 208 - 192$$

$$\sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = \sqrt{16}$$

$$x - y = 4$$

Vermög dieser beiden gefundenen Wehrten von $x + y$, und $x - y$, kan nun der Preis vom Centner, und nach Masgab desselben auch die Zahl davon also gefunden werden:

$$\begin{array}{rcr} x + y = 20 & : & 20 \\ x - y = 4 & : & -4 \\ \hline 2)\,24 & : & 2)\,16 \\ \hline 12 & : & 8 \end{array}$$

Also sind die beide Factoren 12 und 8, davon ein jeder die Centner oder der Preis von einem Centner sein kan.

Dann wann von einem Product die Factoren einmahl addirt und einmahl subtrahirt werden, so ist die Helfte der Summe der eine, und die andere Helfte des Unterschieds der andere Factor.

Eine allgemeine Auflösung ist nun diese:

Das Product 96 sei $= m$, und die Summe 208 $= n$; so ist die Gleichung:

$x^2 + y^2 = n$ Die Ergänzung geschiehet mit $2xy$ und $2m$.

$\sqrt{x^2 + 2xy + y^2} = \sqrt{n + 2m}$

$x + y = \sqrt{n + 2m)}$ Damit kein Irrthum vorgehe, so wurden die Glieder der Wurzel zusammen geschlossen (§. 191).

Die zweite Gleichung ist:

$\sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = \sqrt{n - 2m}$

$x - y = \sqrt{n - 2m)}$

Nun werden die unbestimte Wehrten also gefunden:

$x + y = \sqrt{n + 2m)}$
$x - y = \sqrt{n - 2m)}$

Werden diese beide erhaltene Wehrten der Factoren, y und x, nach vorhin angezeigter Regel einmahl addirt und einmahl subtrahirt, so kommen die Formeln:

$\sqrt{n + 2m)} + \sqrt{n - 2m)}$ Addition der beiden Formeln.
$\sqrt{n + 2m)} - \sqrt{n - 2m)}$ Subtraction der beiden Formeln.

Weil es aber, wie vorhin gesagt, die Helften der Summe und des Unterschieds sein müssen, so werden solche halb angedeutet:

$\frac{1}{2}\sqrt{n + 2m)} + \frac{1}{2}\sqrt{n - 2m)}$
$\frac{1}{2}\sqrt{n + 2m)} - \frac{1}{2}\sqrt{n - 2m)}$

Wird nun nach gegenwärtiger Vorgabe $n = 208$, und $m = 96$ genommen, so ist die Resolution:

$$\begin{array}{r} n = 208 \\ 2m = 192 \\ \hline \sqrt{400} \\ \hline 2)\,20 \\ \hline 10 \\ +2 \\ \hline 12 \end{array} \text{ Der eine Factor.} \qquad \begin{array}{r} n = 208 \\ -2m = -192 \\ \hline \sqrt{16} \\ \hline 2)\,4 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ -2 \\ \hline 8 \end{array} \text{ Der andere Factor.}$$

Nimt man aber willkührlich $n = 41$, und $m = 18$, so ist die Resolution:

$$\begin{array}{r} n = 41 \\ 2m = 36 \\ \hline \frac{1}{2}\sqrt{77} \end{array} \qquad \begin{array}{r} n = 41 \\ -2m = -36 \\ \hline \frac{1}{2}\sqrt{5} \end{array}$$

Also sind die beide Factoren die Irrationalzahlen:

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{77} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}, \text{ und } \tfrac{1}{2}\sqrt{77} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Daß diese beide Factoren das Product 18 würklich machen, solches beweiset die Multiplication nach §. 232 u. f.

$$\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \frac{1}{2}\sqrt{77} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \\ \frac{1}{2}\sqrt{77} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \end{array}\right\} \\ \hline -\frac{1}{4}\sqrt{385} - 1\frac{1}{4} \\ 19\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{385} \\ \hline 19\frac{1}{4} - 1\frac{1}{4} \\ \hline 18 \end{array}$$

$\sqrt{5}$ mahl $\sqrt{5}$ ist 5 (§. 232), und $\frac{1}{2}$ mahl $\frac{1}{2}$ ist $\frac{1}{4}$, damit 5 multiplicirt wird (§. 238 u. s. f.).

18 Das Product.

Daß auch die Quadraten dieser beiden Factoren die Summe von 41 machen, solches beweiset die Probe:

$$\begin{array}{r}
\frac{1}{2}\sqrt{77} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \\
\frac{1}{2}\sqrt{77} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \\
\hline
\frac{1}{4}\sqrt{385} + 1\frac{1}{4} \\
19\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{385} \qquad \\
\hline
19\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{385} + 1\frac{1}{4} \\
\hline
20\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{385} \qquad
\end{array}$$

Quadrat des einen Factors.

$$\begin{array}{r}
\frac{1}{2}\sqrt{77} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \\
\frac{1}{2}\sqrt{77} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \\
\hline
-\frac{1}{4}\sqrt{385} + 1\frac{1}{4} \\
19\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{385} \qquad \\
\hline
19\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{385} + 1\frac{1}{4} \\
\hline
20\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{385} \qquad
\end{array}$$

Quadrat des andern Factors.

Summe dieser beiden Quadraten:

$$\begin{array}{l}
20\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{385} + 20\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{385} \\
\hline
41
\end{array}$$

Nota. Da vorhin die Quadraten reducirt, d. i. die beiden äussern Glieder zusammen gezogen, und dadurch die Eigenschaften eines Quadrats (§. 245) verlohren, statt deren aber Binomien (§. 241) erhalten worden, so muß, wann die Factoren oder Wurzeln wieder gesuchet werden sollen (§. 249 Nota), solches nach §. 593 geschehen.

Die Ausziehung der Wurzeln aus obigen unreducirten Quadraten aber geschiehet nach §. 245 also:

$19\frac{1}{4}$

$19\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{385} + 1\frac{1}{4}$ Quadrat des einen Factors.

$\frac{77}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{385} + \frac{5}{4} \mid \sqrt{\frac{77}{4}} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ Die Wurzel davon.

$-\frac{77}{4}$

$\sqrt{77})\ \frac{1}{2}\sqrt{385} + \frac{5}{4}$

$-\frac{1}{2}\sqrt{385}$

$\frac{5}{4}$

$-\frac{5}{4}$

0

Erstlich ist die Wurzel aus $\frac{77}{4}$: $\sqrt{\frac{77}{4}}$ (§.179), das Duplum $2\sqrt{\frac{77}{4}}$, ganz irrational $\sqrt{\frac{308}{4}}$ (§.239), und reducirt $\sqrt{77}$ (§.240.4).

Mit diesem doppelten Wurzelglied dividirt, komt: $\frac{\frac{1}{2}\sqrt{385}}{\sqrt{77}}$, und reducirt $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ (§.240. 4).

Endlich ist das Quadrat von $\frac{1}{2}\sqrt{5}$: $\frac{5}{4}$; dann $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ ganz irrational, giebt $\sqrt{\frac{5}{4}}$, und das Quadrat davon ist $\frac{5}{4}$ (§. 180).

$19\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{385} + 1\frac{1}{4}$ Quadrat des andern Factors.

$\frac{77}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{385} + \frac{5}{4} \mid \sqrt{\frac{77}{4}} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ Die Wurzel davon.

$-\frac{77}{4}$

$\sqrt{77})\ -\frac{1}{2}\sqrt{385} + \frac{5}{4}$

$+\frac{1}{2}\sqrt{385}$

$\frac{5}{4}$

$-\frac{5}{4}$

0

Also hat man hier zum ersten Wurzelglied $\sqrt{\frac{77}{4}}$, anstatt jenem: $\frac{1}{2}\sqrt{77}$, erhalten, welches aber einerlei ist; dann $\frac{1}{2}\sqrt{77}$ ganz irrational, giebt: $\sqrt{\frac{77}{4}}$ (§.239), und diese rükweegs wieder zum Theil rational, bringt: $\frac{1}{2}\sqrt{77}$; dann wann erstlich der Nenner 4 weggethan wird, so ist der Zähler 77 würklich damit multiplicirt (§. 127), und 4 ist ein Factor; wird ferner nach §. 237 aus diesem Factor die Wurzel, d. i. 2, genommen, solche wegen der Multiplication mit 4 damit dividirt, so ist der Rationaltheil $\frac{1}{2}$, und die Formel: $\frac{1}{2}\sqrt{77}$.

§. 575. **Wird bei einer quadratischen Vorgabe nicht alles angezeiget, was zu deren Auflösung erforderlich wäre, oder man kan nicht so viele Gleichungen finden, als ungleichnahmige unbekante Grössen vorhanden sind (§. 563), so nennet man dieselbige unbe-**

unbestimt, weil dabei vielerlei Antworten statt finden können, wie solches in nachfolgenden Exempeln gezeiget werden sol.

43) Man kaufte etliche Ehlen Tuch, und gab für eine Ehle etliche Gulden: addirt man die Zahl der Ehlen und der Gulden, und thut die Summe zum Betrag, so komt die Zahl 41. Fr. Wie viel waren es Ehlen, und wie viel ist für eine bezahlet worden?

Wann die Ehlen $= y$, und der Preis $= x$, genommen wird, so ist die Gleichung:

$$xy + x + y = 41$$ Um den Wehrt von x zu bekommen, werden solche allein gebracht.

$$y+1)\ xy + x = 41 - y$$

$$x = \frac{41-y}{y+1}$$

Nimt man $y = 8$, so ist $41 - 8 = 33$, welche durch $y + 1$, d. i. 9, dividirt, zum Wehrt von x, $3\frac{2}{3}$ fl. bringen.

Also ist $y = 8$
$x = 3\frac{2}{3}$

$29\frac{1}{3}$ der Betrag.

Hierzu $y + x$, d. i. $8 + 3\frac{2}{3}$, nehmlich $11\frac{2}{3}$

41 Die verlangte Zahl.

Nimt man anstatt der Zahl einen Buchstaben, z. E. a, so kan desselben Wehrt alsdann willkührlich genommen werden, und die Gleichung ist allgemein.

Also hat man hier eine Formel zur allgemeinen Regel: **Wie zwo Zahlen gefunden werden, deren Summe und Product einer jeden beliebigen Zahl gleich sei.**

Z. E. Die Zahl 40 würde gegeben, und zwo Zahlen begehret, deren Product und Summe derselben gleich sei, so könte willkührlich $y = 4$ genommen werden, welche von 40 subtrahirt, 36 übrig lassen; werden solche durch $y + 1$, d. i. 5, dividirt, so komt $7\frac{1}{5} = x$, welches die andere Zahl ist; dann $7\frac{1}{5}$

mit 4 multiplicirt,

giebt: $28\frac{4}{5}$ zum Product; hierzu
addirt: $11\frac{1}{5}$, d. i. $7\frac{1}{5} + 4$,

giebt: 40, die gegebene Zahl.

Item:

Item: Was sind das für zwo Zahlen, deren Summe und Product 1 machen?

Nimt man $y = 3$, subtrahirt solche von 1, bleiben -2, diese durch $y + 1$, d. i. 4, dividirt, bringt $-\frac{1}{2}$ für x, als die andere Zahl; dann $-\frac{1}{2}$
mit 3 multiplicirt,
giebt: $-1\frac{1}{2}$ zum Product; hierzu
addirt: $2\frac{1}{2}$, d. i. $3 - \frac{1}{2}$,
giebt: 1, die gegebene Zahl.

Item: Was sind das für zwo Zahlen, wann man ihr Product und Summe zusammen nimt, es 0 giebt.

Wird $y = 2$ genommen, solche von 0 subtrahirt, bleibt -2, diese durch $y + 1$, d. i. 3, dividirt, komt $-\frac{2}{3} = x$ für die andere Zahl; dann $-\frac{2}{3}$
mit 2 multiplicirt,
giebt: $-1\frac{1}{3}$ zum Product; hierzu
addirt: $1\frac{1}{3}$, d. i. 2 und $-\frac{2}{3}$,
giebt: 0, als die gegebene Zahl.

Item: Was sind das für zwo Zahlen, deren Product und Summe zusammen -4 giebt?

Nimt man $y = 2$, subtrahirt solche von -4, bleibt -6, diese durch $y + 1$, d. i. 3, dividirt, komt -2 für x, als die andere Zahl; dann -2
mit 2 multiplicirt,
giebt: -4 zum Product; hierzu
addirt: 0, d. i. 2 und -2,
-4, als die gegebene Zahl.

Nota. Es gehörete zwar diese Vorgabe zu den einfachen Gleichungen, man hat aber, deutlicher Begriffe halben, mit solchen den Anfang zu unbestimten Vorgaben machen wollen.

44) Man hat zwei unterschiedene gevierte Weingärten, in welchen die Stöke in gleicher Weite voneinander stehen: nimt man die Stöke einer Reihe eines Weingartens

gartens so oft, als Stöke auf einer Reihe des andern Weingartens stehen, d. i. multiplicirt ihre Zahl miteinander, und thut solche Zahl zu der Zahl sämtlicher Stöke der beeden Weingärten, so kan man einen andern gevierten Weingarten damit besezen. Fr. Wie viel Stöke stunden auf einer Reihe von diesen beeden Weingärten?

Wann der Unterschied, d. i. um wie viel die längere Reihe länger, oder die kürzere Reihe kürzer ist, $= y$, und eine Reihe des zu formirenden Weingartens $= t + y$ genommen wird (dann von y, als dem Unterschied, muß der Wehrt gesuchet werden), so ist die grössere Reihe, wann zum voraus eine jede x heissen sol, $= x + y$, und die Kleinere $= x - y$; dahero das Product von diesen beiden Reihen $= x^2 - y^2$, und das Quadrat von $x + y = x^2 + 2xy + y^2$, und von $x - y = x^2 - 2xy + y^2$ ist, welche beide Quadraten mit jenem Product den ersten, und das Quadrat von $t + y$ den andern Theil der Gleichung machen, also:

$$x^2 - y^2 + x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 = t^2 + 2ty + y^2$$

$$3x^2 + y^2 = t^2 + 2ty + y^2$$

$$2t)\ 3x^2 - t^2 = 2ty$$

$$\frac{3x^2 - t^2}{2t} = y$$

Resolution:

Der willkührliche Wehrt von x sei $= 20$ und von $t = 24$,

so ist $3x^2 = 1200$

$-t^2 = -576$

$2t = 48)\ 624$

$13 = y$ Der Unterschied zwischen x.

Also ist $20 + 13 = 33$ die grössere Reihe,
und $20 - 13 = 7$ die kürzere Reihe.

Man hat also hier eine allgemeine Formel und Regel: Wie zwo unterschiedene Zahlen gefunden werden, deren Product und die Summe ihrer Quadraten ein Quadrat machen.

Z. E. x sei $= 4$, und $t = 5$,

$$\begin{array}{rl} \text{so ist } 3x^2 = & 48 \\ -t^2 = & -25 \\ \hline 2t = & 10)\ 23 \\ \hline & 2\tfrac{3}{10} = y \end{array}$$

Der Unterschied zwischen x.

Mithin ist $4 + 2\frac{3}{10} = 6\frac{3}{10}$ die grössere,
und $4 - 2\frac{3}{10} = 1\frac{7}{10}$ die kleinere Zahl.

Dann das Product von $6\frac{3}{10}$ und $1\frac{7}{10}$ ist $= 10\frac{71}{100}$
das Quadrat von $6\frac{3}{10}$ ist $= \ldots 39\frac{69}{100}$
" " " " von $1\frac{7}{10}$ $\ldots\ldots 2\frac{89}{100}$

$53\frac{29}{100}$ Ein Quadrat,
davon die Wurzel $7\frac{3}{10}$ ist (§. 176).

45) Ein Ingenieur bezeichnete einen quadratischen Lustwald, worzu ihme zwei unterschiedene vierekigte Baumschulen angewiesen worden. Fr. Wie viel haben auf jedem Vierek Bäumgen gestanden?

Wird die eine Baumschule $= x^2$, und die Kleinere $= y^2$, genommen, so machen sie zusammen ein Quadrat, und die Gleichung kan die Formel haben:

$$x^2 + y^2 = \square$$

Weil nun die beide Wurzeln oder Seiten der zu suchenden Baumschulen, wann ihre Zahlen zusammmen gethan werden, gleich sein müssen einer Seite des Lustwalds, so ist davon die Gleichung:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = ax - y$$

Diese Wurzeln werden einerseits nach §. 180, und anderseits nach §. 184, zu Quadraten erhaben:

$$x^2 + y^2 = a^2x^2 - 2axy + y^2$$

$$x)\ x^2 = a^2x^2 - 2axy$$

$$x = a^2x - 2ay$$

Umgewandt, um y positiv zu bekommen (§. 497).

$$2a)\ 2ay = a^2x - x$$

$$y = \frac{a^2x - x}{2a}$$

Hier erkennet man, daß die Wurzel zum Quadrat des Lustwaldes: $ax - y$, um deswillen also genommen worden, damit

damit das Quadrat y^2 aus der Gleichung gebracht, und dieselbige einfach gemacht werden könne.

Nun kan man für den Wehrt von x, das sind die Bäumgen auf einer Seite der grössern Baumschule, wie auch für a, eine beliebige Zahl nehmen, und mittelst derselben den Wehrt von y als die Bäumgen auf einer Seite der kleinern Baumschule bestimmen.

Z. E. x sei $=1$, und $a=2$, so wird $\frac{a^2 x - x}{2a} = \frac{3}{4}$ für y; dann 2×2 ist $=4$, mit 1 multiplicirt, giebt 4, weniger 1, bleibt 3, diese mit $2a$, d. i. 4, dividirt, giebt $\frac{3}{4}$.

Sind nun 1 und $\frac{3}{4}$ die beide Seiten, so ist der Inhalt, das sind die Quadraten: 1 (§. 171) und $\frac{9}{16}$, welche zusammen das Quadrat, oder den Inhalt vom Lustwald, ausmachen.

Oder: Es sei $x=2$, und $a=2$, so wird $\frac{a^2 x - x}{2a} = \frac{6}{4}$ für y; sind aber 2 und $\frac{6}{4}$ die Wurzeln, so sind die Quadraten davon 4 und $\frac{36}{16}$, welche zusammen $\frac{100}{16}$ zum Quadrat des Lustwaldes bringen.

Weil aber bei practischen Vorgaben keine gebrochene Wurzeln statt finden (§. 170), so müssen solche nach ihrem Verhältnis zu ganzen Zahlen gegrössert werden.

Z. E. Die Wurzeln 1 und $\frac{3}{4}$ kan man mit dem doppelten Nenner, d. i. 8, grössern, so kommen die Wurzeln 8 und 6, deren Quadraten 64 und 36 sind, welche zur Summe 100 zum Lustwald bringen, und der Vorgabe gemässer ist.

Wird mit dem dreifachen Nenner, d. i. 12, gegrössert, so erhält man die Wurzeln 12 und 9, deren Quadraten 144 und 81 sind, und zur Summe das Quadrat 225 bringen, u. s. f.

Hier hat man also eine allgemeine Formel und Regel: **Wie zwo Quadratzahlen gefunden werden, deren Summe wieder ein Quadrat machet.**

Z. E. x sei $=3$, und $a=4$,

so ist $a^2 x = 48$

$-x = -3$

$2a = 8)\,45$

$5\frac{5}{8} = y$, davon das Quadrat ist: $\frac{2025}{64}$,

oder: $31\frac{41}{64}$

$+9$ Das Quadrat von x.

$40\frac{41}{64}$ Ein Quadrat, davon die Wurzel $6\frac{3}{8}$ ist.

46) Ein Schreiner hatte zween unterschiedene gevierte Stubenböden geleget, und eines jeden Inhalt vergessen; das wuste er aber noch, daß er den Schuh zu 5 kr. accordirt, und der grössere Boden $7\frac{2}{3}$ fl. mehr, als der Kleinere betrage. Fr. Wie wird der Inhalt eines jeden Bodens gefunden?

Erstlich wird gesucht, wie viel 7 fl. 40 kr. an Schuhen bringen:

kr.		Schuh.		fl.	kr.
5	——	1	——	7 :	40

$$5)\ \underline{460}$$

92 Schuhe.

Nun sei die eine Seite des kleinern Bodens $= x$, und die andere Seite des grössern Bodens ebenfals $= x$, nebst dem Unterschied, welcher $= y$, mithin diese Seite $= x + y$ sei.

Werden diese beide Seiten quadrirt, so ist der Inhalt des kleinern Bodens: $= x^2$, und des Grössern: $x^2 + 2xy + y^2$.

Thut man die Formel des kleinern Bodens x^2, von der Formel des Grössern weg, so bleibt: $2xy + y^2$, und um so viel ist der grössere Boden grösser, welche Formel $= 92$ sein muß, also:

$$y^2 + 2xy = 92$$

$$2y)\ 2xy = 92 - y^2$$

$$x = \frac{92 - y^2}{2y}$$

Nimt man $y = 2$, so ist $y^2 = 4$, diese von 92, bleiben 88, welche mit $2y$, das sind 4, dividirt werden, da dann 22 für den Wehrt von x kommen, mithin ist x^2, als das kleinere Quadrat, 484.

Ist nun $x = 22$, und $y = 2$, so ist die Wurzel des grössern Quadrats $x + y = 24$, diese quadrirt, giebt 576, davon das Kleinere subtrahirt, komt der Unterschied 92.

Weil aber durch die Differenz 92 diese Vorgabe eine Bestimmung erhält, so gehörete diese Gleichung, ausser was ihre Procedur betrift, nicht hieher; sezet man aber anstatt der Zahl 92 einen Buchstaben, so wird solche unbestimt, und der Buchstabe kan willkührlich angenommen werden.

Z. E. Die Differenz sei $= a$, so wird dasselbe willkührlich, doch also angenommen, daß eine Subtraction statt haben könne.

Es sei demnach $y = 1$, so ist $y^2 = 1$ (§. 171), a sei $= 2$, hiervon y^2, d. i. 1, subtrahirt, bleibt 1, dieses durch $2y$, d. i. 2, dividirt, komt $\frac{1}{2}$ für x, dessen Quadrat $\frac{1}{4}$ ist.

Ist nun $x = \frac{1}{2}$, und $y = 1$, so ist die Wurzel des grössern Quadrats, nemlich $x + y = 1\frac{1}{2}$, diese quadrirt, giebt $\frac{9}{4}$, oder $2\frac{1}{4}$, davon das kleinere Quadrat, nemlich $\frac{1}{4}$, subtrahirt, bleibt der Unterschied 2.

Also hat man hier eine Regel und Formel: **Wie nach Masgab eines gegebenen oder willkührlich angenommenen Unterschieds zweier Quadraten alle mögliche Quadraten selbst gefunden werden.**

Z. E. Vorhin war der Unterschied 92, jezo sol er 91 sein, und $y = 2$ beibehalten werden.

Ist $y = 2$, so ist $y^2 = 4$, diese von 91 subtrahirt, bleiben 87, welche durch $2y$, d. i. 4, dividirt werden, da dann $21\frac{3}{4}$ für den Wehrt von x komt, mithin ist x^2, als das kleinere Quadrat, $= 473\frac{1}{16}$.

Werden die beide Wehrten von x und y, als die Wurzel des grössern Quadrats, addirt, so erhält man $23\frac{3}{4}$, deren Quadrat $564\frac{1}{16}$ ist, und wann jenes kleinere Quadrat davon subtrahirt wird, der Unterschied 91 zur Probe komt.

47) Mit den Platten eines länglichten Viereks wurde ein Quadrat beleget. Fr. Wie lang und breit war das Vierek?

Die Helfte der Länge und Breite sei $= a$, so sind die beiden gleichen Theile $= 2a$; und die Helfte des Unterschieds sei $= y$, so sind die beiden gleiche Theile $= 2y$.

Sezet man nun dem einen Theil a den einen Theil des Unterschieds einmahl zu, und thut ihn einmahl weg, so sind die Formeln der grossen und kleinen Zahl: $a + y$ und $a - y$, deren Product gleich sein muß $a^2 - y^2$.

Nimt man, wie Nro. 45, für die Wurzel oder eine Seite des Quadrats $xy - a$, um das Quadrat a^2 aus der Gleichung zu bringen, und durch y dividiren zu können, und quadrirt diese Wurzel, so ist die Gleichung:

$$a^2 - y^2 = x^2y^2 - 2axy + a^2$$ Beide a^2 kommen weg.

$$y)\; 2axy = x^2y^2 + y^2$$

$$x^2+1)\; 2ax = x^2y + y$$

$$\frac{2ax}{x^2+1} = y$$

Nimt man $a = 20$ und $x = 3$,
so ist $2ax = 120$
$x^2 + 1 = 10)$ ———
$12 = y$

Dahero ist $a + y = 32$
und $a - y = 8$
256 Das Quadrat der Platten, und die Länge des Viereks war 32, und die Breite 8 Platten.

Hier hat man nun eine allgemeine Formel: Wie eine jede Zahl in zwo andere Zahlen getheilet werde, daß deren Product ein vollkommen Quadrat gebe.

Z. E. Die zu theilende Zahl sei $= 16$, so ist $a = 8$: wird hierzu x nach Belieben $= 2$ genommen,
so ist $2ax = 32$
und $x^2 + 1 = 5)$ ———
mithin $6\frac{2}{5} = y$

Nun ist $a + y = 14\frac{2}{5}$
und $a - y = 1\frac{3}{5}$
Das Product: $\frac{576}{25}$, als ein Quadrat, davon die Wurzel $\frac{24}{5}$, oder $4\frac{4}{5}$ ist.

48) A hat vertauschet zween unterschiedene quadratische Krautäker an B gegen zween andere unterschiedene quadratische Krautäker, auf welchen beeden zusammen eben so viel Pflanzen als auf jenen beeden in gleicher Weite stunden. Fr. Wie viel Pflanzen stunden auf einer Reihe sowohl des A als des B Aekern?

Eine Reihe Pflanzen des grössern Akers von A sei $= a$, und eine Reihe des Kleinern desselbigen $= b$.

Sodann sei eine Reihe des kleinern Akers von B $= a - z$, und eine Reihe des Grössern $yz - b$.

Dahero sind die beiden Aeker von A: a^2 und b^2, und die beiden Aeker von B die Quadraten von den Seiten $a - z$ und $yz - b$, nemlich: $a^2 - 2az + z^2$ und $y^2z^2 - 2byz + b^2$, mithin ist die Gleichung:

$$a^2 - 2az + z^2 + y^2z^2 - 2byz + b^2 = a^2 + b^2$$

$$-2az + z^2 + y^2z^2 - 2byz = 0$$

$$z)\; z^2 + y^2z^2 = 2byz + 2az$$

$$1 + y)\; z + y^2z = 2by + 2a$$

$$z = \frac{2by + 2a}{1 + y^2}$$

Hier werden $a^2 + b^2$ gegen jene weggethan, und die Quadratglieder auf eine Seite gebracht.

Nach diesem gefundenen Wehrt von z wird dessen Wehrt bestimt, wann dem a, b und y beliebige Zahlen zugeeignet werden.

Z. E. a sei $= 10$, $b = 8$, und $y = 5$,

so ist $2by = 80$

$2a = 20$

$y^2 + 1 = 26)\; 100$

$3\frac{11}{13} = z$

Da nun die Wurzel des kleinern Quadrats von A:

$= a - z$, $= 6\frac{2}{13}$, und das Quadrat davon: $37\frac{147}{169}$

Die Wurzel vom grössern Quadrat:

$= yz - b$, $= 11\frac{3}{13}$, und das Quadrat davon: $126\frac{22}{169}$

so ist die Summe beider Quadraten: 164

Alsdann ist die Wurzel vom grössern Quadrat von A:

$= a$, und das Quadrat davon: 100

Die Wurzel vom kleinern Quadrat:

$= b$, und das Quadrat davon: 64

Summe der beiden Quadraten: 164, wie jene beide Quadraten.

Zu den Seiten des Akers von B wurden die Seiten $a - z$ und $yz - b$ um deswillen also genommen, damit man die

Quadraten a^2 und b^2 von der Summe wegthun, und das Uebrige durch z dividiren könne.

Es ist zwar diese Auflösung nicht practisch, weil die Theile einer Pflanze nicht statt finden (§. 170); nichts destoweniger hat man hier doch eine allgemeine Formel und Regel erhalten: **Wie die Summe zweier Quadraten in zwei andere Quadraten von gleicher Summe verwandelt werden können.**

Z. E. Wie werden die Quadraten 4 und 9, deren Summe 13 ist, in zwei andere Quadraten verwandelt, deren Summe auch 13 sei?

Hiernach ist $2 = a$, $3 = b$, und y sol willkührlich $= 4$ sein, z ist $= \frac{2by + 2a}{y^2 + 1}$, dessen Resolution also geschiehet:

$$\begin{array}{r} 2by = 24 \\ 2a = 4 \\ \hline 28 \end{array}$$

$$2y^2 + 1 = 17)\ \overline{}\ \ 1\tfrac{11}{17} = z$$

Vermög dieser Wehrten von a, b, y und z, werden die zu suchende Quadraten nach Masgab der Wurzeln $a - z$ und $yz - b$ nun also gefunden:

$$\begin{array}{rl} a = 2 & \\ -z = -1\tfrac{11}{17} & \\ \hline \tfrac{6}{17} & \text{Die kleinere Seite.} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} yz = 6\tfrac{10}{17} & \\ -b = -3 & \\ \hline 3\tfrac{10}{17} & \text{Die grössere Seite.} \end{array}$$

Der kleinern Seite Quadrat ist: $\frac{36}{289}$

Der grössern Seite aber: . . $12\frac{253}{289}$

Summe: 13, wie die beiden erstern Quadraten.

49) Einer kaufte zweierlei Coffeebohnen, und gab für ein Pfund von jeder Sorte so viel Kreuzer, als er Pfund davon kaufte; da er nun den Preis und die Zahl der Pfunde vergessen, sich aber erinnerte, daß die beste Sorte $8\frac{1}{3}$ fl. mehr als die Geringere betragen,

tragen, so können die Preise, mithin auch die Pfunden, leicht gefunden werden. Fr. Wie geschiehet solches?

Wann der Preis der geringern Sorte $= x$, der Preis der Bessern $= x + y$, und der Unterschied $= a$, das sind $8\frac{1}{3}$ fl. oder 500 kr. so sind die sämtliche Kreuzer der geringern Sorte die Quadratzahl x^2, und der bessern Sorte die Quadratzahl von $x + y$, nemlich: $x^2 + 2xy + y^2$, und die Gleichung ist, wann das kleinere Quadrat, d. i. x^2, von dem Grössern weggethan worden:

$$y^2 + 2xy = a;$$

dann wann der kleinere Betrag vom Grössern weggethan wird, so bleibt der Unterschied (s. Nro. 45).

$$2y)\ 2xy = a - y^2$$

$$x = \frac{a - y^2}{2y}$$

Nimt man $y = 10$, und $a = 500$ Kreuzer, wie sie nemlich bestimt sind, dann sonsten kan es eine jede Zahl sein, von welcher sich ein angenommener Wehrt von y^2 abziehen lässet, so ist die Resolution:

$$a = 500$$

$$-y^2 = -100$$

$$2y = 20)\ 400$$

$$20 = x,$$

als der Preis der geringern Sorte, mithin auch so viel Pfund.

Diese 20 lb. thun 400 kr. zu welchen 500 addirt, 900 kr. für die bessere Sorte anzeigen, aus welchen die Quadratwurzel 30 die Pfund sind.

Hierbei hat man eine allgemeine Regel: **Wie allezeit zwei Quadraten gefunden werden, deren Unterschied eine beliebige Zahl sein sol.**

Z. E. Es sol der Unterschied $= 3$ und $y = 1$ sein, so ist $3 - y^2 = 2$, welches durch $2y$ dividirt, 1 für x bringet, dessen Quadrat 1 ist (§. 171).

Also ist $x = 1$ und $x + y = 2$, beider Wurzeln Quadrat aber 1 und 4, mithin der Unterschied 3.

50) Einer legte einen Theil seines Geldes aufs Spiel, und erhielte so viel wieder zurük, als das Product machte, wann sothaner Theil mit ihm selbst multiplicirt oder quadrirt würde, und bekam dadurch zur sämtlichen Baarschaft eine Summe, die eine Quadratzahl war, deren Wurzel so viel thate, als er anfänglich Geld hatte. Fr. Wie viel hat er aufs Spiel gesezet, und welches war der übrige Theil seiner Baarschaft?

Wann der eine Theil des Geldes $= x$, und der andere Theil $= y$, genommen wird, so ist die Gleichung:

$$x^2 + y = x^2 + 2xy + y^2;$$
$$y)\ y - y^2 = 2xy$$
$$2)\ 1 - y = 2x$$
$$\frac{1-y}{2} = x$$

dann die beide Theile des Geldes sind $x + y$, welches auch die Wurzel vom andern Theil der Gleichung sein muß.

Nimt man $y = \frac{1}{2}$, so ist $1 - y = \frac{1}{2}$, dieses mit 2 dividirt, bringt $\frac{1}{4}$ als den Wehrt von x.

Also wurde nach dieser Bestimmung $\frac{1}{4}$ aufs Spiel gesezet, und dafür $\frac{1}{16}$, d. i. $\frac{1}{4}$ mahl $\frac{1}{4}$ erhalten: dieses zu y, als dem andern Theil, nemlich $\frac{1}{2}$, addirt, giebt: $\frac{9}{16}$, daraus die Wurzel $\frac{3}{4}$, und also den beiden Theilen des Geldes $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ gleich ist.

Es scheinet zwar diese Auflösung, wegen des Quadrats $\frac{1}{16}$, nicht practisch zu sein; sie ist es aber dennoch aus folgenden Gründen:

Nach der erhaltenen Antwort sind die beiden Theile des Geldes $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$.

Diese beiden Theile müssen also die ganze Baarschaft, d. i. Eins, ausmachen, deren Wehrt nach der Regel de Tri gesuchet werden muß.

Hierzu sol 1 fl. oder 60 kr. der Masstab sein, also:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ thut 60 kr. was macht $\frac{1}{2}$? Antw. 40 kr. als den einen Theil.

$\frac{3}{4}$ thut 60 kr. was macht $\frac{1}{4}$? Antw. 20 kr. als den andern Theil.

Summe: 60 kr. oder 1 fl.

Dieser

Dieser zweite Theil, nemlich $\frac{1}{4}$, wurde aufs Spiel gesezet, und dafür wieder so viel zurük erhalten, als wann er mit ihm selbst multiplicirt, d. i. nach der Multiplicationsregel so oft genommen worden wäre, als er Einten in sich fasset, welches $\frac{1}{16}$ thut.

Wann aber $\frac{1}{4}$ des Geldes 20 kr. thut, so macht $\frac{1}{16}$, 5 kr. diese zu 40 gethan, bringt 45 kr. oder $\frac{3}{4}$ fl.

Wann also bei dieser Vorgabe nicht auf eine Vermehrung oder Gewinn, sondern nur auf das, was man wieder zurük erhalten, gesehen wird, so begreift man gar leicht, daß diese Auflösung practisch sei.

Indessen hat man hier eine Formel zur allgemeinen Regel: **Zwo Zahlen zu finden, daß, wann die eine zum Quadrat der andern addirt werde, man wieder ein Quadrat erhalte, dessen Wurzel gleich denen zwo Zahlen sei.**

Z. E. Die eine Zahl, nemlich y, sei $= 2$, so ist $1 - y = - 1$, diese durch 2 dividirt, giebt $- \frac{1}{2}$ für x, welche mit sich selbst multiplicirt oder quadrirt $= \frac{1}{4}$ ist (§. 78): wird dieses Quadrat zu 2 addirt, so giebt es das Quadrat von $2\frac{1}{4}$ oder $\frac{9}{4}$, davon die Wurzel $\frac{3}{2}$ oder $1\frac{1}{2}$ ist, mithin die beide Zahlen 2 und $- \frac{1}{2}$ sind.

51) Man hat zween ungleiche Hauffen Quadersteine, wil damit zween gevierte Pläze belegen, findet aber, daß jeder Hauffe, und zwar einer wie der andere, verschiedene mahl mehr sein müsse. Fr. Wie viel Steine liegen auf einem Hauffen, um wie viel mahl müssen solche mehr sein, und welches sind alsdann die beide Quadratpläze?

Wann die Zahl des einen Hauffens $= a$, des Andern $= b$, die vervielfältigende Zahl $= x$, der eine Quadratplaz $= y^2$, und der Andere $= v^2$, so hat man vors erste diese zwo Gleichungen:

a) $ax = y^2$ $\qquad$ b) $bx = v^2$

$x = \frac{y^2}{a}$ $\qquad$ $x = \frac{v^2}{b}$

Nun sage:

$$\frac{y^2}{a} = \frac{v^2}{b}$$

$$b)\; by^2 = av^2$$

$$\sqrt{})\; y^2 = \frac{av^2}{b}$$

$$y = v\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Resolution:

Wann eine Rationalzahl gefunden werden sol, so können die Buchstaben des Bruchs, wie es sich von selbsten verstehet, nicht willkührlich genommen werden, sondern man muß ihnen solche Wehrte zueignen, daß der Quotient eine Quadratzahl sei, z. E. 18 durch 2 dividirt, bringt die Quadratzahl 9.

Dahero sei $a = 32$, $b = 8$, so ist $\sqrt{\frac{a}{b}} = 2$.

Nimt man den Factoren v (§. 146. 231. 238) $= 5$, so ist $y = 5$ mahl 2, d. i. 10.

Ist nun $v = 5$, so ist $v^2 = 25$, welche mit b, d. i. 8, dividirt, $\frac{25}{8}$, oder $3\frac{1}{8}$, als den Wehrt von x bringt.

Probe:

Die vervielfältigende Zahl x ist $= 3\frac{1}{8}$, mit dieser a, d. i. 32, multiplicirt, bringt zum einen Quadratplaz 100: sodann b, d. i. 8, mit x, d. i. $3\frac{1}{8}$, multiplicirt, zeiget den andern Quadratplaz von 25 an.

Oder: a sei $= 36$, $b = 9$, so ist $\sqrt{\frac{a}{b}} = 2$.

Nimt man $v = 7$, so ist $y = 2$ mahl 7, d. i. 14.

Ist nun $v = 7$, so ist $v^2 = 49$, welche mit b, d. i. 9, dividirt, $\frac{49}{9}$, oder $5\frac{4}{9}$, als den Wehrt von x bringet.

Probe:

Die vervielfältigende Zahl x ist $= 5\frac{4}{9}$, mit dieser a, d. i. 36, multiplicirt, bringt zum einen Quadratplaz 196, sodann b, d. i. 9, mit $5\frac{4}{9}$ multiplicirt, zeiget den andern Quadratplaz von 49 an.

Hierbei

Hierbei hat man eine allgemeine Regel, ausser was die Ausnahme wegen der Rationalzahl betrift: **Zwo unterschiedene Zahlen also gleich zu vervielfältigen, daß beide Producten Quadratzahlen werden;** oder, welches einerlei ist: **Eine Zahl zu finden, welche, wann man dieselbige mit zwo beliebigen unterschiedenen NB. ganzen Zahlen multiplicirt, zwei Quadratzahlen herauskommen.**

Z. E. Eine Zahl mit 12 und 3 zu multipliciren, daß es zwo Quadratzahlen gebe, so wird erstlich 12 durch 3 dividirt, komt 4, daraus die Wurzel = 2 ist: wird diese mit v, als einer willkührlichen Zahl, welche 3 sein sol, multiplicirt, so giebt es 6, welche, wann sie quadrirt, und durch 3 dividirt wird, zum Quotienten die Zahl, nemlich 12, anzeiget, dann 12 und 3 mit 12 multiplicirt, giebt zwei Quadratzahlen.

52) Was sind das für zwei Quadraten, wann man dieselbige miteinander multiplicirt, und eines zum Product addirt, daß die Summe wieder ein Quadrat sei?

Nennet man das eine Quadrat x^2, und das Andere y^2, so ist ihr Product x^2y^2, und so das Eine addirt wird, so giebt es die Formel: $x^2y^2 + x^2$, oder: $x^2y^2 + y^2$.

Wird die erstere Formel durch x^2 dividirt, so ist der Quotient $y^2 + 1$, und die zweite Formel durch y^2, so ist der Quotient $x + 1$, welches sowohl als jene Formeln Quadraten sein müssen.

Nimt man nun zu einer Wurzel $z - y$, und zur Andern $t - x$, weil sich y^2 und x^2 subtrahiren lassen müssen, um Rationalwehrte zu erhalten, so hat man folgende zwo Gleichungen:

$$y^2 + 1 = z^2 - 2zy + y^2, \quad \text{und} \quad x + 1 = t^2 - 2tx + x^2$$

$$1 = z^2 - 2zy \qquad\qquad 1 = t^2 - 2tx$$

$$2z)\ 2zy = z^2 - 1 \qquad\qquad 2t)\ 2tx = t^2 - 1$$

$$y = \frac{z^2 - 1}{2z} \qquad\qquad x = \frac{t^2 - 1}{2t}$$

Resolution:

Nimt man $z = 2$, und $t = 3$, so ist $y = \frac{3}{4}$, und $x = 1\frac{1}{3}$.

Oder $z = 3$, und $t = 4$, so ist $y = 1\frac{1}{3}$, und $x = 1\frac{7}{8}$.

Probe:

Probe:

Ist $y = 1\frac{1}{3}$, und $x = 1\frac{7}{8}$, so ist $y^2 = \frac{16}{9}$, und $x^2 = \frac{225}{64}$, und das Product $\frac{3600}{576}$; wird hierzu $\frac{16}{9}$ addirt, so ist die Summe: $\frac{4624}{576}$, oder: $8\frac{16}{576}$, welches ein Quadrat ist.

Sodann ist $\frac{3600}{576} + \frac{225}{64} = \frac{5625}{576}$, oder $9\frac{441}{576}$, welches ebenfals ein Quadrat ist.

Nota. Es finden zwar sothane Exempeln in Praxi keine statt; weil aber dergleichen in algebraischen Schriften zuweilen vorkommen, auch zur Uebung sehr dienlich sind, so hat man solcher einige beizufügen für nöthig erachtet.

53) Was ist das für eine Zahl, da, wann man dieselbige mit zwo unterschiedenen Zahlen multiplicirt, und zu jedem Product wiederum eine andere Zahl addirt, beide Summen Quadraten sind?

Die zu suchende Zahl sei $= x$, die beiden Multiplicatoren $= a$ und $= b$, die beiden Addirende $= c$ und $= d$, und die beiden Quadraten $= y^2$ und $= v^2$, so ergeben sich die beiden Gleichungen ganz deutlich:

$a)\ ax + c = y^2$, und $b)\ bx + d = v^2$

$$x = \frac{y^2 - c}{a} \qquad x = \frac{v^2 - d}{b}$$

Diese beide Wehrten von x werden nun in eine Gleichung gebracht.

$$\frac{y^2 - c}{a} = \frac{v^2 - d}{b}$$

$$y^2 - c = v^2 - d$$ Mit a und b gegenseitig gegrössert (§. 128).

$$by^2 - bc = av^2 - ad$$

$$b)\ by^2 = av^2 - ad + bc$$

$$\sqrt{\ })\ y^2 = \sqrt{\frac{av^2 - ad + bc}{b}}$$

Hier kan der Zähler bc durch den Nenner reducirt werden (§. 134), so komt c.

$$y = \sqrt{\frac{av^2 - ad}{b}} + c$$

Um

Um nun den Bruch wegzuschaffen, und eine Rationalzahl zu bekommen, so quadrirt man erstlich die Gleichung, und nimt m^2 für den Bruch $\frac{a}{b}$, so giebt es die Formel:

$y^2 = m^2 v^2 - m^2 d + c$; dann wann das Zeichen $\surd$ weggethan wird, so giebt es ein Quadrat (§. 180).

Nimt man ferner für die Wurzel $t - mv$, oder $mv - t$, quadrirt solche, und sezet das Quadrat anstatt y^2, so hat man die Gleichung:

$$m^2 v^2 - 2tmv + t^2 = m^2 v^2 - m^2 d + c \text{ Reducirt}$$

$$-2tmv + t^2 = -m^2 d + c$$

$$m^2 d - c + t^2 = 2tmv \text{ Umgewandt (§. 498).}$$

$$2tm)\ 2tmv = m^2 d - c + t^2$$

$$v = \frac{m^2 d - c + t^2}{2tm}$$

Sezet man endlich für m^2 seinen vorhin gegebenen Wehrt $\frac{a}{b}$, so giebt es die Formel:

$$v = \frac{\frac{a}{b} d + t^2 - c}{2tm} \text{ Diesen Bruch mit } b \text{ gegrößert.}$$

$$v = \frac{ad + bt^2 - bc}{2btm}$$

Resolution:

Wird $t = 4$, $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$, und $d = 3$, genommen, so findet man den Wehrt von m, welchen man hier wissen muß, also:

$\frac{a}{b}$ ist oben $= m^2$ genommen worden.

Da nun $a = 1$, und $b = 1$, so ist $\frac{a}{b} = \frac{1}{1}$, und also $= m^2$, wie auch $= m$ (§. 171. 185).

Nun ist, diesen gegebenen Wehrten nach, bei dem Zähler des Bruchs:

$$\begin{array}{rr} ad = & 3 \\ bt^2 = & 16 \\ \hline & 19 \\ -bc = & -2 \\ \hline & 17 \end{array}$$

bei dem Nenner: $2tbm = 8) \overline{\quad 17 \quad}$

$2\frac{1}{8}$ der Wehrt von v.

Da ferner oben der Wehrt von $x = \frac{v^2 - d}{b}$, so ist die

Resolution:

$v^2 = \frac{289}{64}$, oder: $4\frac{33}{64}$

$-d = \ldots -3$

Mit b, d. i. 1, dividirt: $1) \; 1\frac{33}{64}$

$1\frac{33}{64}$, welches die gesuchte Zahl ist.

Probe:

Die Zahl ist: $1\frac{33}{64}$ (1, d. i. $= a$, multiplicirt.

$1\frac{33}{64}$

c, d. i. $= 2$, add. 2

$3\frac{33}{64}$ Das Quadrat, davon die Wurzel $= \frac{15}{8}$, oder $1\frac{7}{8}$ ist (§. 176).

Ferner: Die Zahl ist: $1\frac{33}{64}$ (1, d. i. $= a$, multiplicirt.

$1\frac{33}{64}$

d, d. i. $= 3$, add. 3

$4\frac{33}{64}$ Das Quadrat, davon die Wurzel $= \frac{17}{8}$, oder $2\frac{1}{8}$ ist.

54) Wie werden zwo Zahlen gefunden, daß, wann das Quadrat der einen zu der andern addirt wird, die Summe die Wurzel eines Quadrats sei, welches den beiden Zahlen gleich ist?

Wann die eine Zahl z, und die andere y genennet wird, so ist die Gleichung:

$z^2 + y$

$$z^2 + y = \surd z + y$$

Um die Gleichung vom Wurzelzeichen zu befreien, so wird $z + y$ zum Quadrat erhaben (§. 180), hernach aber auch $z^2 + y$ ebenfals quadrirt, d. i. mit sich selbst multiplicirt.

$$z^2 + y = z + y$$
$$z^4 + 2z^2y + y^2 = z + y$$
$$z^4 + 2z^2y + y - y = z$$
$$y)\, 2z^2y + y^2 - y = z - z^4$$

Hier wird $2z^2y - y$ mit y dividirt, u. der Quot. $2z^2 - 1 = v$ genommen, so erhält man die Eigenschaft eines Quadr. welches nach §. 198 No. IV. mit $\frac{1}{4}v^2$ supplirt wird.

$$2z^2 - 1) + y^2 = z - z^4$$
$$vy + y^2 = z - z^4$$
$$y^2 + vy = z - z^4$$
$$+ \tfrac{1}{4}v^2 \qquad + \tfrac{1}{4}v^2$$
$$\surd)\, y^2 + vy + \tfrac{1}{4}v^2 = \surd z - z^4 + \tfrac{1}{4}v^2$$
$$\tfrac{1}{2}v + y = \surd \tfrac{1}{4}v^2 + z - z^4$$
$$y = \surd \tfrac{1}{4}v^2 + z - z^4) - \tfrac{1}{2}v$$
$$z^4 - z^2 + \tfrac{1}{4} \qquad - z^2 - \tfrac{1}{2}$$

Reduc. $y = \surd z^4 - z^2 + \frac{1}{4} + z - z^4) - z^2 + \frac{1}{2}$

$$y = \surd \tfrac{1}{4} + z - z^2) - z^2 + \tfrac{1}{2}$$

Hier komt an die Stelle von v sein oben zugeeigneter u. jezt erhaltener Wehrt; dann wann der obige Wehrt von v, nemlich $2z^2 - 1$, quadrirt, und davon $\frac{1}{4}$ genommen wird, so hat man den Gegenwärtigen $z^4 - z^2 + \frac{1}{4}$, und $-\frac{1}{2}v$ ist hier $-z^2 + \frac{1}{2}$, indeme $2z^2 - 1$ durch 2 dividirt, so viel komt.

Dieses wäre zwar die Auflösung; alleine die Bestimmung bei der Resolution kan nicht willkührlich sein, weil $\frac{1}{4} + z - z^2$ ein Quadrat vorstellen muß.

Man nehme dahero $zx - \frac{1}{2}$ zur Quadratwurzel, davon das Quadrat $z^2x^2 - zx + \frac{1}{4}$ ist, und vergleiche dieses mit jener Grösse also:

$$z^2x^2 - zx + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} + z - z^2$$

Die beide Vierteln werden gegeneinander weggethan.

$$z)\, z^2x^2 - zx = z - z^2$$
$$zx^2 - x = 1 - z$$

Die z werden zusammen gebracht.

$$x^2 + 1)\, zx^2 + z = x + 1$$
$$z = \frac{x + 1}{x^2 + 1}$$

Resolu-

Resolution:

Wird nun $x = 2$ genommen, so ist $z = \frac{3}{5}$;
dann: $x + 1$ ist $= z + 1$, d. i. $= 3$,
und: $x^2 + 1$ ist $= 4 + 1$, d. i. $= 5$,
wornach der Wehrt von y auch gefunden wird:

$$\begin{array}{rl} & \overset{25}{\smile} \\ z \text{ ist} = \frac{3}{5} & .\ 5\ .\ 15 \\ -z^2 = -\frac{9}{25} & .\ 1\ .\ 9 \quad \overset{100}{\smile} \\ \hline \frac{6}{25} & .\ 24 \\ +\frac{1}{4} & .\ 25 \\ \hline \sqrt{\frac{49}{100}} & \quad \overset{10}{\smile} \\ \hline \frac{7}{10} & .\ 7 \\ +\frac{1}{2} & .\ 5 \quad \overset{100}{\smile} \\ \hline \frac{12}{10} & .\ 120 \\ -z^2 = -\frac{9}{25} & .\ 36 \\ \hline \end{array}$$

$\frac{84}{100}$, oder $\frac{21}{25}$, der Wehrt von y.

Probe:

Die erste Zahl ist $\frac{3}{5}$, das Quadr. davon $\frac{9}{25}$
Die Andere $\frac{21}{25}$, wird addirt . . . $\frac{21}{25}$

$\frac{30}{25}$, oder: $1\frac{1}{5}$ Summe, das Quadrat davon ist $\frac{36}{25}$, oder: $1\frac{11}{25}$, welches gleich $\frac{3}{5}$
$+\frac{21}{25}$

$\frac{36}{25}$, oder: $1\frac{11}{25}$.

55) Was sind das für zwo Zahlen, deren Product ein Cubus, und dessen Wurzel gleich ist dem Product, wann die erste Zahl und das Quadrat der Andern miteinander multiplicirt werden?

Die erste Zahl sei $= x$, die Andere $= y$, und die Wurzel $= v$.

$$y^2)\ v = xy^2 \qquad\qquad y)\ xy = v^3$$

$$\frac{v}{y^2} = x \qquad\qquad x = \frac{v^3}{y}$$

Diese beide Wehrten von x werden gegeneinander verglichen:

$$\frac{v}{y^2} = \frac{v^3}{y}$$

Beide Zähler werden mit ihren Nennern gegrössert; weil aber dieser Theil gegen jenen um y mahl zu wenig gegrössert wird, so muß er mit y multiplicirt werden.

$$v)\ v = v^3 y$$

$$v^2)\ 1 = v^2 y$$

$$\frac{1}{v^2} = y$$

Also ist der Wehrt von $y = \frac{1}{v^2}$, welche Bruchsformel gleich x gemacht werden muß, welches geschiehet, wann sie zu 1, d.i. v zum fünften Grad, erhaben wird; dann da mag v genommen werden, wie man wil, so wird allzeit $v^5 = 1$ (§. 234 Not. II.).

Z. E. v sei $= 2$, so ist $v^2 = 4$, mithin $\frac{1}{v^2} = \frac{1}{4}$.

Wird nun $\frac{1}{4}$ zweimahl mit 2 multiplicirt, so kommen $\frac{4}{4}$, d.i. 1, und nach jener Formel $= v^5$.

Die Resolution kan nun willkührlich bestimt werden.

Z. E. Es sei $v = 2$, so ist $v^5 = 32$, und also $x = 32$.

Ist $\frac{1}{v^2} = y$, so ist $y = \frac{1}{4}$.

Also ist $xy = 8$, und also ein Cubus.

Wird die erste Zahl 32 mit dem Quadrat der andern Zahl, d.i. $\frac{1}{16}$, multiplicirt, so komt 2, als die Wurzel vom Cubus.

Item: Wird $v = 3$ genommen, so ist $v^5 = 243$, und also $x = 243$.

Ist $\frac{1}{v^2} = y$, so ist $y = \frac{1}{9}$.

Also ist $xy = 27$, und also ein Cubus.

Wird die erste Zahl 243 mit dem Quadrat der andern Zahl, d.i. $\frac{1}{81}$, multiplicirt, so komt 3, als die Wurzel vom Cubus.

§. 576. Nun folgen die Auflösungen arithmetischer und geometrischer Progressionen, welche §. 321 Nota VI. und §. 335 Nota versprochen worden.

56) Die Summe einer arithmetischen Progression, deren leztes Glied 157 und die Differenz 2 ist, beträgt 2760. Fr. Wie viel enthält solche Glieder, und welches ist die Zahl des ersten Glieds?

Das lezte Glied sei b, das Erste x, der Unterschied d, die Anzahl der Glieder y, und die Summe c, so ist die Gleichung:

$$x + b)\ \tfrac{1}{2} y = c$$

Dann wann die Summe des ersten und lezten Gliedes mit der Helfte der Glieder multiplicirt wird, so ist das Product gleich der Summe der Progression (§. 320).

Um den Bruch wegzuschaffen, so wird der eine Theil der Gleichung, d. i. das Product: $\tfrac{1}{2} y$ mahl $x + b$, und der andere Theil der Gleichung, nemlich c, mit 2 gegrössert, so komt:

$$x + b)\ y = 2c$$

Damit nun x allein gebracht werde, so multiplicirt man erstlich mit y gewöhnlich, und dividirt aldann damit:

$$y)\ yx + yb = 2c$$

$$x + b = \frac{2c}{y}$$

$$x = \frac{2c}{y} - b$$

Also ist das erste Glied gleich der doppelten Summe, wann solche durch die Anzahl der Glieder dividirt, und vom Quotienten das lezte Glied subtrahirt wird.

Nun ist das lezte Glied gleich dem ersten Glied, wann zu diesem das Product des Unterschieds und der Anzahl der Glieder addirt, und der Unterschied wieder subtrahirt wird, davon die Formel also ist:

$$b = x + dy - d$$ Um x allein zu bringen.

$$b + d - dy = x$$

Also ist auch das erste Glied gleich dem lezten Glied, wann zu diesem der Unterschied addirt und das Product des Unterschieds und der Anzahl der Glieder wieder subtrahirt wird.

Diese

Diese beide erhaltene Wehrten von x werden nun in eine Gleichung gebracht, um den Wehrt von dem dabei befindlichen y zu finden.

$$\frac{2c}{y} - b = b + d - dy \quad \text{Mit } y \text{ gegrößert.}$$

$$2c - by = by + dy - dy^2 \quad \text{Um } 2c \text{ allein zu bringen.}$$

$$dy^2 - by - by - dy = -2c$$

$$d)\ dy^2 - 2by - dy = -2c$$

$$y^2 - \frac{(2b - d)y}{d} = -\frac{2c}{d}$$

Wären die beiden Glieder des Zählers: $-2b-d$, nicht mit y, d. i. mit der unbekanten Zahl der Glieder, multiplicirt, so könte man y^2 alleine bringen, da dann die Wurzel dem andern bekanten Theil der Gleichung gleich sein würde.

Daher wird für oder gleich den Bruch ein unbestimter Wehrt genommen, welcher m sei (§. 14), so hat man die Formel:

$$\frac{2b + d}{d} = m$$

Ist also der Bruch $= m$, so wird m anstatt des Bruchs mit y multiplicirt, und die vorige Gleichung ist:

$$y^2 - my = -\frac{2c}{d}$$

Da nun der erste Theil der Gleichung Eigenschaften einer Quadratgrösse enthält (§. 183), so wird derselbe nach §. 197 IV. zu einem vollkommenen Quadrat supplirt, mithin beiderseits $\frac{1}{4}m^2$ addirt, und alsdann die Wurzel ausgezogen:

$$\sqrt{y^2 - my + \tfrac{1}{4}m^2} = -\frac{2c}{d} + \tfrac{1}{4}m^2$$

$$y - \tfrac{1}{2}m = \sqrt{\tfrac{1}{4}m^2 - \frac{2c}{d}}$$

Wann nun die unbestimte Buchstaben m, womit procedirt worden, bestimt, d. i. auf die bekante Buchstaben angewendet oder applicirt werden, so erhält man die Gleichung wieder in bekanten Buchstaben, also, daß solche nunmehro in gemeine Zahlen resolvirt werden kan;

Dann wann oben der Bruch $\frac{2b+d}{d} = m$, oder, welches einerlei: $m = \frac{2b+d}{d}$, so muß hier $\frac{1}{2}m$ die Helfte vom Bruch sein, welcher an die Stelle von $\frac{1}{2}m$ komt:

$$y - \frac{b-\frac{1}{2}d}{d} = \sqrt{\tfrac{1}{4}m^2 - \frac{2c}{d}}$$

Ist ferner $\frac{1}{4}m^2$ der vierte Theil vom Quadrat des Bruchs, so muß solcher quadrirt und mit 4 multiplicirt werden (§.143 u.f.), da dann das Quadrat ist:

$$\frac{4b^2 + 4bd + d^2}{d^2}$$

und der vierte Theil davon:

$$\frac{b^2 + bd + \frac{1}{4}d^2}{d^2}$$

Welcher Bruch nun auch an die Stelle von $\sqrt{\frac{1}{4}m^2}$ komt, mithin die Gleichung ist:

$$y - \frac{b-\frac{1}{2}d}{d} = \sqrt{\frac{b^2+bd+\frac{1}{4}d^2}{d^2} - \frac{2c}{d}}$$ Um y allein zu bringen.

$$y = \sqrt{\frac{b^2+bd+\frac{1}{4}d^2}{d^2} - \frac{2c}{d}} + \frac{b-\frac{1}{2}d}{d}$$

Resolution:

$$\begin{array}{r} b^2 = 24649 \\ bd = 314 \\ \frac{1}{4}d^2 = 1 \\ \hline d^2 = 4)\ 24964 \\ \hline 6241 \\ -2760 \\ \hline \pm\sqrt{3481} \\ \hline -59 \\ 79 \\ \hline 20 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2c = 5520 \\ d = 2) \\ \hline 2760 \end{array} \qquad \begin{array}{r} b = 157 \\ \frac{1}{2}d = 1 \\ \hline d = 2)\ 158 \\ \hline 79 \end{array}$$

20 Der Wehrt von y, d. i. die Anzahl der Glieder.

Hier lehret die Vernunft, daß die Wurzel 59 negativ genommen werden müsse (§. 181), weil man sonst 138 Glieder bekäme, da doch nach der Vorgabe die Zahl des lezten Glieds nur 157 ist.

Dieser

Dieser Wehrt von y wird nun an dessen Stelle oben in der dritten Gleichung zum Nenner genommen, und somit auch der Wehrt von x, oder das erste Glied, gefunden:

$$x = \frac{2c}{20} - b$$

davon die Resolution also ist:

$$\begin{array}{rl} 2c = & 5520 \\ 20) & \overline{} \\ & 276 \\ -b = & -157 \\ \hline & 119 \end{array}$$

119 Der Wehrt von x, oder das erste Glied.

Nach dieser allgemeinen Auflösung sei nach einer andern Vorgabe das lezte Glied der Progression 108, die Differenz $4\frac{1}{2}$, und die Summe oder der Betrag aller Glieder 1188. Fr. Wie viel Glieder hat diese Progression, und welches ist die Zahl des ersten Gliedes?

Es ist also $108 = b$, das erste Glied $= x$, $4\frac{1}{2} = d$, die Anzahl der Glieder $= y$, und $1188 = c$, mithin die Resolution:

$$\begin{array}{rl} b^2 = & 11664 \\ bd = & 486 \\ \frac{1}{4}d^2 = & 5\frac{1}{16} \\ \hline d^2 = 20\frac{1}{4}) & 12155\frac{1}{16} \\ \hline & 600\frac{1}{4} \\ & -528 \\ \hline & \pm\sqrt{72\frac{1}{4}} \\ \hline & -\frac{17}{2}, \text{ d.i. } -8\frac{1}{2} \\ & 24\frac{1}{2} \\ \hline & 16 = y \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 2c = & 2376 \\ d = 4\frac{1}{2}) & \overline{} \\ & 528 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} b = & 108 \\ \frac{1}{2}d = & 2\frac{1}{4} \\ \hline d = 4\frac{1}{2}) & 110\frac{1}{4} \\ \hline & 24\frac{1}{2} \end{array}$$

Hier muß die Wurzel aus vorhin gemeldter Raison ebenfals negativ genommen werden.

$16 = y$, d. i. so viel Glieder hat die Progression.

Nun ist $x = \frac{2c}{16} - b$

$$\begin{array}{rl} 2c = & 2376 \\ \hline 16) & 148\frac{1}{2} \\ -b = & -108 \\ \hline & 40\frac{1}{2} \end{array}$$

$40\frac{1}{2} = x$, oder das erste Glied.

57) Bei einer arithmetischen Progression ist das erste Glied 6, der Unterschied 3, und die Summe oder der Betrag der Glieder 162. Fr. **Wie viel sind es Glieder, und welches ist die Zahl des lezten Glieds?**

Das erste Glied sei a, der Unterschied d, die Anzahl der Glieder x, das lezte Glied y, und die Summe c, so ist die Operation der Vorigen gleich.

Vors Erste ist die Summe des ersten und lezten Glieds mit der Helfte der Anzahl der Glieder multiplicirt gleich der Summe der Progression (§. 320), also:

$$a+y)\tfrac{1}{2}x = c$$ Mit 2 gegrössert.

$$a+y)\,x = 2c$$ Um x allein zu bringen.

$$x)\; xa + xy = 2c$$

$$y = \frac{2c}{x} - a$$

Also ist das lezte Glied gleich der doppelten Summe durch die Anzahl der Glieder dividirt, und vom Quotienten das erste Glied subtrahirt.

Nun ist das erste Glied und das Product der Differenz und der Anzahl der Glieder, weniger die Differenz, gleich dem lezten Glied (§. 316):

$$a + dx - d = y$$

Diese beide Wehrten von y werden in eine Gleichung gebracht, um den Wehrt von x zu finden:

$$\frac{2c}{x} - a = a + dx - d$$ Mit x gegrössert.

$$2c - xa = xa + dx^2 - xd$$ Um $2c$ allein zu bringen.

$$2c = xa + xa + dx^2 - xd$$ Reducirt.

$$d)\; 2c = 2xa + dx^2 - xd$$ Mit d dividirt, und $2a - d$ mit x multiplcirt, nach §.85.

$$\frac{2c}{d} = \frac{2a - d)\,x}{d} + x^2$$

Nun

Nun wird der Bruch $= m$ genommen, und mit x multiplicirt, weil er vorhin auch mit demselben multiplicirt worden,

$$\frac{2a - d}{d} = m$$

und die Gleichung ist sodann:

$$\frac{2c}{d} = mx + x^2$$ Nach §. 198 No. IV. zu einem Quadrat supplirt.

$$\frac{2c}{d} + \frac{1}{4}m^2 = mx + x^2 + \frac{1}{4}m^2$$ Umgewandt.

$$\sqrt{x^2 + mx + \frac{1}{4}m^2} = \frac{1}{4}m^2 + \frac{2c}{d}$$

$$x + \frac{1}{2}m = \sqrt{\frac{1}{4}m^2 + \frac{2c}{d}}$$

Ist nun $m = \frac{2a - d}{d}$, so ist $\frac{1}{2}m = \frac{a - \frac{1}{2}d}{d}$, und die Gleichung: $x + \frac{a - \frac{1}{2}d}{d} = \sqrt{\frac{1}{4}m^2 + \frac{2c}{d}}$

Ist ferner $\frac{1}{4}m^2$ der vierte Theil vom Quadrat des Bruchs: $\frac{2a - d}{d}$, so wird solcher erst quadrirt (§. 143 u. f.), da dann das Quadrat ist:

$$\frac{4a^2 - 4ad + d^2}{d^2}$$

und der vierte Theil:

$$\frac{a^2 - ad + \frac{1}{4}d^2}{d^2}$$

Folglichen ist nunmehro die Gleichung:

$$x + \frac{a - \frac{1}{2}d}{d} = \sqrt{\frac{a^2 - ad + \frac{1}{4}d^2}{d^2} + \frac{2c}{d}}$$

$$x = \sqrt{a^2 - ad + \frac{1}{4}d^2 + \frac{2c}{d}}\Big) - \frac{a - \frac{1}{2}d}{d}$$

Resolution:

$$\begin{array}{r} a^2 = 36 \\ -ad = 18 \\ \hline 18 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2c = 324 \\ d = 3) \\ \hline 108 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a = 6 \\ -\frac{1}{2}d = -1\frac{1}{2} \\ \hline d = 3)\ 4\frac{1}{2} \\ \hline 1\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{4}d^2 = 2\frac{1}{4} \\ \hline d^2 = 9)\ 20\frac{1}{4} \\ \hline 2\frac{1}{4} \\ 108 \\ \hline \pm\sqrt{110\frac{1}{4}} \\ \hline 10\frac{1}{2} \text{ (§. 176).} \\ -1\frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$$

$9 = x$, d. i. die Anzahl der Glieder.

Nun ist $y = \frac{2c}{9} - a$

davon die **Resolution** ist:

$$\begin{array}{r} 2c = 324 \\ 9) \overline{} \\ 36 \\ -6 \\ \hline 30 \end{array}$$

30 Das lezte Glied.

58) Die Summe einer arithmetischen Progression ist 147, die Anzahl der Glieder willkührlich, das Product aber des ersten und lezten Gliedes 297. Fr. Welches ist das erste und lezte Glied?

Das Product sei a, die Anzahl der Glieder n, die Summe der Progression c, das erste Glied x, und das Lezte y.

Wann die Summe des ersten und lezten Gliedes mit der Helfte der Glieder multiplicirt wird, so ist bekantlich das Product gleich der Summe der Progression (§. 320), davon die Gleichung ist:

$(x + y)\frac{1}{2}n = c$ Mit 2 gegrössert.

$(x + y)n = 2c$ Jedes Glied mit n multiplicirt.

$xn + yn = 2c$ Um y allein zu bekommen.

$n)\ yn = 2c - xn$

$y = \frac{2c}{n} - x$

Nun

Nun wird das Product a gleich den unbekanten Factoren, d. i. das erste und lezte Glied, genommen, um den Wehrt des einen Factoren zu erhalten:

$$a = xy$$ Wegen der Division umgewandt.

$$x)\ xy = a$$

$$y = \frac{a}{x}$$

Werden diese beide erhaltene Wehrte von y in eine Gleichung gebracht, so wird auch der Wehrt von x gefunden:

$$\frac{a}{x} = \frac{2c}{n} - x$$ Mit x gegrösſert.

$$a = \frac{2cx}{n} - x^2$$ Wegen der Division x^2 vornen hin (§. 497).

$$x^2 - \frac{2cx}{n} = -a$$

Da der erste Theil der Gleichung aus etlichen Eigenschaften einer Quadratgrösse bestehet (§. 183), so kan dieselbige nach §. 198 No. IX. also supplirt werden:

$$x^2 - \frac{2cx}{n} = -a$$

$$+\frac{c^2}{n^2} \qquad +\frac{c^2}{n^2}$$

$$\sqrt{x^2 - \frac{2cx}{n} + \frac{c^2}{n^2}} = -a + \frac{c^2}{n^2}$$

$$x - \frac{c}{n} = \sqrt{\frac{c^2}{n^2} - a}$$ Um x allein zu bekommen.

$$x = \sqrt{\frac{c^2}{n^2} - a)} + \frac{c}{n}$$

Resolution:

$c^2 = 21609$

n sol sein 7, mithin $n^2 = 49)$ ———

441

$-a = -297$

$\pm\sqrt{144}$

12

$\frac{c}{n} = 21$

33 Das lezte Glied, als der Wehrt von y.

Wird die Wurzel negativ genommen, so komt der Wehrt von x, als:

-12

$\frac{c}{n} = 21$

9 Das erste Glied, als der Wehrt von x.

59) Bei einer arithmetischen Progression ist das erste Glied $8\frac{1}{2}$, das Lezte 33, und die Summe 166. Fr. **Wie viel hat dieselbige Glieder, und was ist der Unterschied derselben?**

Das erste Glied sei a, das Lezte b, die Summe c, die Anzahl der Glieder x, und der Unterschied y.

Wird die Summe des ersten und lezten Glieds mit der Helfte Anzahl der Glieder multiplicirt, so ist bekantlich das Product gleich der Summe der Progression (§. 320), und die Gleichung:

$a + b)\ \frac{1}{2}x = c$ Mit 2 gegrössert.

$a + b)\ x = 2c$ Um x allein zu bringen.

$a + b)\ ax + bx = 2c$

$$x = \frac{2c}{a+b}$$

Nun ist die Summe des ersten Glieds, und das Product der Anzahl der Glieder und des Unterschieds, weniger den Unterschied, gleich dem lezten Glied, davon die Gleichung ist:

$a + xy$

$a + xy - y = b$ Um x allein zu bringen.

$y)\ xy - y = b - a$

$x = \frac{b + y - a}{y}$

Nun wird der Wehrt von y gefunden, wann die beide gefundene Wehrten von x in eine Gleichung gestellet werden:

$\frac{2c}{a+b} = \frac{b+y-a}{y}$ Beide Theile der Gleichung mit y gegrösset.

$\frac{2cy}{a+b} = b + y - a$ Beide Theile auch mit $a + b$ gegrösset, oder multiplicirt, und zwar der zweite Theil erst mit a, und dann mit b.

$2cy = ab + ay - a^2$

$b^2 + by - ba$

$2cy = ab + ay - a^2 + b^2 + by - ba$ Reducirt.

$2cy = ay - a^2 + b^2 + by$ Um y allein zu bringen.

$2c - a - b)\ 2cy - ay - by = b^2 - a^2$

$y = \frac{b^2 - a^2}{2c - a - b}$

Resolution:

$b^2 = 1089$
$-a^2 = 72\frac{1}{4}$
$1016\frac{3}{4}$

$2c = 332$
$-a = -8\frac{1}{2}$
$323\frac{1}{2}$
$-b = -33$
$290\frac{1}{2}$

Wird $1016\frac{3}{4}$ durch $290\frac{1}{2}$ dividirt, so komt $3\frac{1}{2}$ für y, als der Unterschied.

Weil nun $y = 3\frac{1}{2}$, so ist die Resolution für x:

$b = 33$
$y = 3\frac{1}{2}$
$36\frac{1}{2}$
$-a = 8\frac{1}{2}$

28 mit y, d. i. $3\frac{1}{2}$, dividirt, bringt 8 Glieder.

Da bei dergleichen Vorgaben keine Quadratwurzel auszuziehen vorkomt, so gehöreten solche auch nicht hieher; weil es aber die Progression betrift, so hat man solche hier beifügen müssen.

60) Man

60) Man hat eine arithmetische Progression von verschiedenen Gliedern, deren Unterschied $3\frac{1}{3}$, und die Summe 100 ist. Fr. Welches ist das erste und lezte Glied?

Die unbestimte Anzahl der Glieder sei n, das erste Glied x, der Unterschied d, das lezte Glied y, und die Summe c.

Die Summe des ersten und lezten Glieds mit der halben Anzahl der Glieder multiplicirt, ist, wie bekant, gleich der Summe der Progression (§. 320), mithin die Gleichung:

$$x+y)\tfrac{1}{2}n = c \quad \text{Mit 2 gegrößert.}$$

$$x+y)n = 2c$$

$$n)\ nx + ny = 2c \quad \text{Um } y \text{ allein zu bringen.}$$

$$x + y = \frac{2c}{n}$$

$$y = \frac{2c}{n} - x$$

Nun ist das lezte Glied gleich der Summe des ersten Glieds, und dem Product der Anzahl der Glieder mit der Differenz, weniger der Differenz, und also die Gleichung:

$$y = x + nd - d$$

Diese beide Wehrten von y werden nun gewöhnlich in eine Gleichung gebracht, um den Wehrt von x zu bekommen:

$$\frac{2c}{n} - x = x + nd - d \quad \text{Um } x \text{ auf eine Seite zu bringen.}$$

$$\frac{2c}{n} - nd + d = 2x \quad \text{Wegen der Division die Gleichung umgewandt (§. 497).}$$

$$2)\ 2x = \frac{2c}{n} - nd + d$$

$$x = \frac{c}{n} - \tfrac{1}{2}nd + \tfrac{1}{2}d$$

Resolu-

Resolution:

$$\begin{array}{r} c = 100 \\ n = 6)\overline{} \\ 16\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2}nd = 10 \\ \hline 6\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2}d = 1\frac{2}{3} \\ \hline 8\frac{1}{3} \end{array}$$

$8\frac{1}{3}$ Das erste Glied, und also der Wehrt von x.

Nun ist die Resolution für y:

$$\begin{array}{r} 2c = 200 \\ n = 6)\overline{} \\ 33\frac{1}{3} \\ -x = 8\frac{1}{3} \\ \hline 25 \end{array}$$

25 Das lezte Glied, oder der Wehrt von y.

61) Bei einer Progression ist der Unterschied 3, das erste Glied 6, und das lezte Glied 27. Fr. Aus wie viel Gliedern bestehet dieselbige, und was ist ihre Summe?

Das erste Glied sei a, die Anzahl der Glieder x, das lezte Glied b, die Summe y, und der Unterschied d.

Aus dem Vorherigen ist bekant, daß das lezte Glied gleich ist der Summe des ersten Glieds, und dem Product des Unterschieds und der Anzahl der Glieder, weniger den Unterschied, davon die Gleichung ist:

$b = a + dx - d$ Um x allein zu bringen.

$b - a + d = dx$ Wegen der Division umgew. (§.497).

$d)\ dx = b - a + d$

$$x = \frac{b - a + d}{d}$$

Nun ist die Summe gleich der Helfte von der Summe des ersten und lezten Glieds, mit der Anzahl der Glieder multiplicirt:

$y =$

$y = (\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a)\,x$ Ein jedes Glied mit x multiplicirt.

$y = \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}ax$ Mit zwei gegrössert.

$2y = xb + xa$ Wegen der Division umgewandt (§.497).

$b + a)\; xb + xa = 2y$

$$x = \frac{2y}{b+a}$$

Diese beide Wehrte von x werden nun in eine Gleichung gebracht, um den Wehrt von y zu bekommen:

$\frac{2y}{b+a} = \frac{b-a+d}{d}$ Mit beiden Nennern gegrössert (§. 128).

$2yd = b^2 - ab + bd + ab - a^2 + ad$ Reducirt.

$2d)\; 2yd = b^2 + bd - a^2 + ad$

$$y = \frac{b^2 + bd - a^2 + ad}{2d}$$

Resolution:

$b^2 = 729$
$bd = 81$
810
$-a^2 = 36$
774
$ad = 18$
$2d = 6)\; 792$
$132 = y$, d. i. die Summe.

Resolution für x:

$2y = 264$
$b + a = 33)$ ——
$8 = x$, d. i. die Anzahl der Glieder.

62) Bei einer geometrischen Progression von 6 Gliedern ist die Summe 728, und das Verhältnis 3, welches ist das erste Glied?

Wann die Glieder $= n$, die Summe gleich c, und das Verhältnis $= m$ genommen wird, so ist die Summe nach §.333 und die Gleichung also:

$$\frac{xm^{n-1} - x}{m-1} + xm^{n-1}, \text{ oder: } \frac{xm^n - x}{m-1} + xm^n$$

Weil man nach §. 323 ohnehin weiß, daß n die Glieder und die Graden um 1 weniger, als Glieder sind, anzeige, so

so kan -1 wegbleiben, auch das zweite Glied, nach Masgab der Resolution §. 127, als Ganze vornen, mithin die Gleichung also stehen:

$$xm^n + \frac{xm^n - x}{m - 1} = c$$ Die beiden ersten Glieder werden nach §. 127 zu gleicher Benennung resolvirt und gegrössert.

Reduc. $xm^{2n} - xm^n + xm^n - x = cm - c$; dann $-xm^n + xm^n$ gehen gegeneinander auf.

$m^{2n} - 1)\ xm^{2n} - x = cm - c$ Die Division mit 2 Gliedern, da dem Divisor 1 Glied unter 1 beigefüget wird, s. §. 114.

$$x = \frac{cm - c}{m^{2n} - 1}$$

Die Resolution des Zählers oder Dividenden ist:

$$\begin{array}{rr} c = & 728 \\ m = & 3 \\ \hline & 2184 \\ -c = & -728 \\ \hline & 1456 \end{array}$$

Die Resolution des Nenners oder Divisors ist:

$m = 3$, mithin ist

$m^{2n} = 729$; dann erstlich ist m zum zweiten Grad, und durch die Multiplication des Exponenten 2 mit n ferner bis zum fünften Grad erhaben, welcher die Glieder 6 andeuten muß.

$$\begin{array}{r} -1 \\ \hline 728 \end{array}$$

728) 1456 | 2 = x, als das erste Glied.
     1456 |

Weil auch hier nunmehro der Ort ist, da zu Ausziehung der Wurzel aus einer jeden Poligonalzahl eine allgemeine Regel gegeben werden kan, so geschiehet solches versprochener Massen (§. 349. 369).

§. 577. Sol aus einer gemeinen Trigonalzahl (§. 347) die Wurzel auf eine allgemeine Weise gezogen werden, so nenne man die Trigonalzahl t, die zu suchende Wurzel x, nach welcher Wurzel dann die Formel der Trigonalzahl nach §. 348 hier also ist: $\frac{x^2 + x}{2}$, welche Grösse der Grösse t gleich sein muß.

Z. E. Die gemeine Trigonalzahl sei 21:

$$\frac{x^2 + x}{2} = t \text{ Mit 2 gegrößert.}$$

$$x^2 + x = 2t$$

$$\sqrt{x^2 + x + \tfrac{1}{4}} = \sqrt{2t + \tfrac{1}{4}};$$ dann die Ergänzung des Quadrats geschiehet mit $\frac{1}{4}$ (§. 197).

$$x + \tfrac{1}{2} = \sqrt{2t + \tfrac{1}{4}}$$

$$x = \sqrt{2t + \tfrac{1}{4}}) - \tfrac{1}{2}$$

Resolution:

$$2t = 42$$
$$+ \tfrac{1}{4}$$
$$\sqrt{42\tfrac{1}{4}}$$
$$6\tfrac{1}{2}$$
$$- \tfrac{1}{2}$$
$$6 \text{ Die Wurzel.}$$

Wann also eine beliebige Trigonalzahl doppelt genommen, $\frac{1}{4}$ addirt, aus der Summe die Quadratwurzel gezogen, und $\frac{1}{2}$ subtrahirt wird, so ist der Rest die Wurzel.

Z. E. Die Trigonalzahl sei 210,

so ist $2t = 240$
$$+ \tfrac{1}{4}$$
$$\sqrt{240\tfrac{1}{4}}$$
$$20\tfrac{1}{2}$$
$$- \tfrac{1}{2}$$
$$20 \text{ Die Wurzel.}$$

Hierauf folgete die gemeine Tetragonalzahl, davon die allgemeine Bezeichnung §. 351 befindlich, dabei aber keine allgemeine Auflösung statt findet, weil solche mit der Quadratzahl einerlei ist (§. 350).

§. 578. **Wil man zu einer gemeinen Pentagonalzahl (§. 352) auf allgemeine Art die Wurzel suchen,** so bezeichne man die vorgegebene Zahl mit p, und die Wurzel mit x, nach welcher Wurzel die Pentagonalzahl hier folgende Formel hat: $\frac{3x^2 - x}{2}$ (§. 353).

Z. E.

Z. E. Die Pentagonalzahl sei 51:

$$\frac{3x^2 - x}{2} = p$$

$$3)\ \overline{3x^2 - x = 2p}$$

$$x^2 - \tfrac{1}{3}x = \frac{2p}{3}$$ Hier wird das Quadrat nach §. 198 No. II. supplirt.

$$+\tfrac{1}{36} \qquad +\tfrac{1}{36}$$

$$\sqrt{x^2 - \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{36}} = \sqrt{\frac{2p}{3} + \tfrac{1}{36}}$$

$$x - \tfrac{1}{6} = \sqrt{\frac{2p}{3} + \tfrac{1}{36}}$$

$$x = \sqrt{\frac{2p}{3} + \tfrac{1}{36}}) + \tfrac{1}{6}$$

Resolution:

$$2p = 102$$
$$3)\ \overline{}$$
$$34$$
$$+\tfrac{1}{36}$$
$$\sqrt{34\tfrac{1}{36}}$$
$$5\tfrac{5}{6}$$
$$+\tfrac{1}{6}$$

6 Die Wurzel.

Wann also eine beliebige Pentagonalzahl, doppelt genommen, $\frac{1}{36}$ addirt, aus der Summe die Quadratwurzel gezogen, und $\frac{1}{6}$ addirt wird, so ist die Summe die Wurzel.

Z. E. Die Pentagonalzahl sei 477, so sind $2p = 954$

$$3)\ \overline{}$$
$$318$$
$$+\tfrac{1}{36}$$
$$\sqrt{318\tfrac{1}{36}}$$
$$17\tfrac{5}{6}$$
$$+\tfrac{1}{6}$$

18 Die Wurzel.

§. 579. Nach dieser Anweisung kan man sich zu einer jeden der folgenden gemeinen Poliigonalzahlen, um ihre Wurzel zu finden, besondere Regeln suchen, wann man nur ferner nach §. 356. 359 u. s. f. die Poliigonalzahl mittelst Benennung der Wurzel mit x formiret hat.

Z. E. Wann zu der 21 ekigten Zahl 406 die Wurzel gesuchet werden sol, so ist nach §. 361 die Formel $\frac{19n^2 - 17n}{2}$, hier aber $\frac{19x^2 - 17x}{2}$, mithin die Gleichung und Reduction:

$$\frac{19x^2 - 17x}{2} = p$$

$$19)\ 19x^2 - 17x = 2p$$

$$x^2 - \frac{17x}{19} = \frac{2p}{19}$$

Hier wird das Quadrat nach §. 198 No. II. mit $\frac{289}{1444}$ supplirt. dann halb $\frac{17}{19}$ ist $\frac{17}{38}$, u. hiervon das Quadrat, macht so viel.

$$+\tfrac{289}{1444} \qquad +\tfrac{289}{1444}$$

$$\sqrt{x^2 - \frac{17x}{19} + \frac{289}{1444}} = \sqrt{\frac{2p}{19} + \frac{289}{1444}}$$

$$x - \tfrac{17}{38} = \sqrt{\frac{2p}{19} + \frac{289}{1444}}$$

$$x = \sqrt{\frac{2p}{19} + \frac{289}{1444}}) + \tfrac{17}{38}$$

Resolution:

$$2p = 812$$

$$19)\ \overline{}$$

$$42\tfrac{14}{19}$$

$$+\tfrac{289}{1444}$$

$$\sqrt{42\tfrac{1353}{1444}}$$

$$38)\ 249$$

$$6\tfrac{21}{38}$$

$$+\tfrac{17}{38}$$

7 Die Wurzel.

§. 580. **Wil man aber zu Ausziehung der Wurzeln aus allen und jeden gemeinen Poliigonalzahlen** (§. 344) **eine allgemeine Regel haben,** so muß natürlicher Weise auch eine allgemeine Bezeichnung derselben vorausgesezet werden.

§. 581. Diese allgemeine Formel wird aus der allgemeinen Summe einer arithmetischen Progression hergeleitet, welche §. 321 gemacht worden, und also ist:

$$2a + (n - 1)\, m)\, \tfrac{1}{2} n$$

dergestalten, daß man erstlich a, wodurch das erste Glied einer arithmetischen Progression vorgestellet wird (§. 315), weglässet, weil bei denen Poliigonalzahlen das erste Glied immer 1 sein muß (§. 344), sodann m für die Zahl der Eken, mithin zur Differenz $m - 2$, und also anstatt m zum Multiplicatoren nimt, indeme der Eken allezeit zwo mehr sind, als die Differenz ist (§. 347), folglichen die Summe also formelt:

$$2 + (n - 1) \times (m - 2)\, \tfrac{1}{2} n$$

welche Formel eben diejenige gemeine Poliigonalzahl, als jene, vorstellet.

Z. E. **Es würde die Zahl 7 zu einer Seite oder Wurzel** (§. 348) **gegeben,** um darnach eine 21 ekigte Zahl zu suchen, so wäre die Resolution nach vorstehender Formel:

$n - 1 = 6$; dann da $n = 7$, so ist $n - 1 = 6$.
$m - 2 = 19$; da $m = 21$, so ist $m - 2 = 19$.

114
+2

116
$3\tfrac{1}{2} n = 3\tfrac{1}{2}$; dann da $n = 7$, so ist $\tfrac{1}{2} n = 3\tfrac{1}{2}$.

348
58

406 Die 21 ekigte Zahl.

§. 582. Nach dieser Bezeichnung einer gemeinen Poliigonalzahl wird nun zu Ausziehung der Wurzeln eine allgemeine Regel gefunden, wann man die Poliigonalzahl mit p, und die Wurzel mit x benennet, und solche also formelt:

$$\begin{array}{r} x - 1 \\ m - 2 \\ \hline -2x + 2 \\ mx - m \\ \hline mx - 2x - m + 2 \\ +2 \\ \hline mx - 2x - m + 4 \\ \tfrac{1}{2}x \\ \hline \end{array}$$

$$\tfrac{1}{2}x^2 m - x^2 - \tfrac{1}{2}xm + 2x = p$$ Mit 2 gegrössert.

$$m-2)\; x^2 m - 2x^2 - xm + 4x = 2p \quad (*)$$

$$x^2 \frac{-xm + 4x}{m-2} = \frac{2p}{m-2}$$

$$x^2 - x\frac{m-4}{m-2} = \frac{2p}{m-2}$$

$$+\frac{(\tfrac{1}{2}m-2)^2}{(m-2)^2} \qquad +\frac{(\tfrac{1}{2}m-2)^2}{(m-2)^2}$$

$$\sqrt{x^2 - x\frac{m-4}{m-2} + \frac{(\tfrac{1}{2}m-2)^2}{(m-2)^2}} = \sqrt{\frac{2p}{m-2} + \frac{(\tfrac{1}{2}m-2)^2}{(m-2)^2}}$$

$$x - \frac{\tfrac{1}{2}m-2}{m-2} = \sqrt{\frac{2p}{m-2} + \frac{(\tfrac{1}{2}m-2)^2}{(m-2)^2}}$$

$$x = \sqrt{\frac{2p}{m-2} + \frac{(\tfrac{1}{2}m-2)}{(m-2)}} + \frac{\tfrac{1}{2}m-2}{m-2}$$

Folgendes ist der oben mit (*) bezeichneten Stelle beizusezen:

Hier wird $x^2 m - 2x^2$ durch $m - 2$ dividirt und das Uebrige bruchsweise getheilt (§. 116), welches alsdann reducirt wird, von welcher Reduction §. 146 nachzusehen ist, und welche man sich begreiflich macht, wann denen Buchstaben beliebige Zahlen zugeeignet und die Brüche resolvirt werden, dabei gleiche Wehrten kommen: das Suppliren geschiehet hierauf nach §. 198 No. VIII. und die Ausziehung der Wurzel wie §. 188 gezeiget worden.

Dieses

Dieses ist nun die allgemeine Formel und Regel, nach welcher die Wurzel aus einer jeden gemeinen Poliigonalzahl gefunden werden kan.

Z. E. Es sei die Jcosigonal- oder 20 ekigte Zahl 276 gegeben, um aus derselben die Wurzel zu suchen, so ist nach vorstehendem Wehrt von x, als der angenommenen Wurzel, die Resolution also:

276 die Jcosigonalzahl, welche $= p$,
dahero $2p = 552$
Der Divisor $m - 2 = 18$) ——
$30\frac{2}{3}$
$\frac{16}{81}$
——
$\sqrt{30\frac{70}{81}}$
——
$\frac{1}{2}m - 2$ ist 8, $5\frac{5}{9}$
mit $m - 2$, d.i. 18, dividirt, ist $= \frac{4}{9}$
——
6 Die Jcosigonalwurzel.

Hierzu wird addirt das Quadrat von $\frac{1}{2}m - 2$, welches $= \frac{1}{4}m^2 - 2m + 4$ (§. 184), und nach dem Wehrt, da $m = 20,64$ ist, nachdem es mit dem Quadrat von $m - 2$, nemlich 18×18, d.i. 324, dividirt worden, mithin $\frac{64}{324}$, oder $\frac{16}{81}$, gebracht.

§. 583. Man kan aber diese Regel folgender Massen einschränken:

Erstlich wird des ersten Glieds Zähler $2p$, anstatt denselben mit seinem Nenner $m - 2$ zu dividiren, multiplicirt, und also multiplicando gegrössert (§. 127), so ist das erste Glied nur $2p$,

Alsdann wird des zweiten Glieds Nenner $(m - 2)^2$ in den ersten Grad gesezet (§. 53), und dadurch der Zähler ebenfals würklich mit $m - 2$ multiplicando gegrössert,

Endlich hat man den Nenner des dritten Glieds nicht mehr nöthig, weil ein gemeinschaftlicher Divisor, nemlich $m - 2$, schon vorhanden, folglichen die abgekürzte Formel also ist:

$$x = \sqrt{\frac{2p(m - 2) + (\frac{1}{2}m - 2^2) + \frac{1}{2}m - 2}{m - 2}}$$

Die Icosigonalzahl sei, wie vorhin, 276, und $= p$

$$
\begin{array}{rl}
\text{mithin } 2p = & 552 \\
m - 2 = & 18 \\
\hline
& 4416 \\
& 552 \\
\hline
& 9936 \\
\tfrac{1}{2}m - 2)^2 = & 64 \\
\hline
& \sqrt{10000} \\
\hline
& 100 \\
\tfrac{1}{2}m - 2 = & 8 \\
\hline
m - 2 = 18) & 108 \\
\hline
& 6 \text{ Die Icosigonalwurzel.}
\end{array}
$$

§. 584. Sol die Wurzel auf eine allgemeine Art aus einer Centraltrigonalzahl (§. 369) gezogen werden, so bezeichne man die gegebene Centraltrigonalzahl mit t, und die zu suchende Wurzel mit x, so ist die Formel nach §. 368 und die Gleichung also:

Z. E. Es sol zu der Centraltrigonalzahl 85 die Wurzel gesuchet werden:

$$\frac{3x^2 - 3x}{2} + 1 = t$$

$$3)\ 3x^2 - 3x + 2 = 2t$$

$$x^2 - x = \frac{-2 + 2t}{3} \quad \text{Nach §. 197 mit } \tfrac{1}{4} \text{ supplirt.}$$

$$\sqrt{x^2 - x + \tfrac{1}{4}} = \sqrt{\frac{-2 + 2t}{3} + \tfrac{1}{4}}$$

$$x - \tfrac{1}{2} = \sqrt{\frac{-2 + 2t}{3} + \tfrac{1}{4}}$$

$$x = \sqrt{\frac{-2 + 2t}{3} + \tfrac{1}{4}}) + \tfrac{1}{2}$$

Hier werden die Wurzelbrüche unter einen Nenner gebracht (§. 128), und alsdann der Zähler reducirt (§. 135).

$$x = \sqrt{\frac{-8 + 8t + 3)}{12}} + \tfrac{1}{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{8t - 5}{12}}) + \tfrac{1}{2}$$

Resolu-

Resolution:

$$8t = 680$$
$$-5$$
$$12)\ 675$$
$$\sqrt{56\tfrac{1}{4}}$$
$$7\tfrac{1}{2}$$
$$+\tfrac{1}{2}$$

8 Die Centraltrigonalwurzel.

§. 585. Wil man zu einer vorgegebenen Centraltetragonalzahl (§. 370) die Wurzel auf eine allgemeine Art haben, so wird, wie vorhin, die Zahl mit t, und die Wurzel mit x bezeichnet, da dann die Formel und Gleichung also ist:

Z. E. Die Centraltetragonalzahl sei 41:

$$\frac{4x^2 - 4x}{2} + 1 = t$$

$$4)\ 4x^2 - 4x = 2t - 2$$

$$x^2 - x = \frac{2t-2}{4}$$ Das suppliren geschiehet, wie vorhin, nach §. 197 mit $\frac{1}{4}$.

$$\sqrt{x^2 - x + \tfrac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2t-2}{4} + \tfrac{1}{4}}$$

$$x - \tfrac{1}{2} = \sqrt{\frac{2t-2}{4} + \tfrac{1}{4}}$$

$$x = \sqrt{\frac{2t-2}{4}\ ) + \tfrac{1}{2}}$$ Wolte man den Bruch mit 2 kleinern, so erhielte man: $\sqrt{\frac{t-1}{4} + \tfrac{1}{4}}) + \tfrac{1}{2}$, welches aber keinen Vortheil brächte.

Resolution:

$$2t = 82$$
$$-2$$
$$4)\ 80$$
$$20$$
$$+\tfrac{1}{4}$$
$$20\tfrac{1}{4}$$

$\sqrt{\tfrac{81}{4}} = \tfrac{9}{2}$, oder $4\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 5$ Die Centraltetragonalwurzel.

§. 586. Hat man die Wurzel einer Centraltpentagonalzahl (§. 372) auf eine allgemeine Art zu suchen, so wird die gegebene Zahl mit p, und die Wurzel mit x benennet, da dann die Formel und Gleichung also ist:

Z. E. Die Centralpentagonalzahl sei 31:

$$\frac{5x^2 - 5x}{2} + 1 = p$$

$$5)\ 5x^2 - 5x + 2 = 2p$$

$$x^2 - x = \frac{2p - 2}{5}$$ Die Ergänzung des Quadrats ist mit $\frac{1}{4}$, wie vorhin (§. 197).

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{2p - 2}{5} + \frac{1}{4}$$ Mit 4 gegrössert.

$$\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = \sqrt{\frac{8p - 8}{5} + 1}$$

$$2)\ 2x - 1 = \sqrt{\frac{8p - 8}{5} + 1}$$

$$x = \frac{\sqrt{\frac{8p - 8}{5} + 1}\,) + 1}{2}$$

Resolution:

8p = 248
− 8
5) 240
48
+ 1
√49
7
+ 1
2) 8
4 Die Centralpentagonalwurzel.

§. 587. Nach der bisherigen Anweisung (§. 584 u. f.) kan man sich nun zu einer jeden der folgenden Centralpoliigonal=

gonal=

gonalzahlen eine allgemeine Regel machen, die Wurzeln aus denselben zu finden.

§. 588. Wil man aber zu Ausziehung der Wurzeln aus allen und jeden Centralpoliigonalzahlen (§. 364), gleichwie §. 580 zu gemeinen Poliigonalzahlen, eine allgemeine Regel haben, so wird die Formel darzu gefunden, wann die Zahl mit p, die Wurzel mit x, und die Coefficienten mit m benennet werden, da man dann die Gleichung erhält:

$$\frac{mx^2 - mx}{2} + 1 = p$$

$$mx^2 - mx + 2 = 2p$$

$$mx^2 - mx = 2p - 2$$

Beide Theile mit m gegrösset, um Eigenschaften vom Quadrat zu bekomen (§. 183. 195), worauf die Ergänzung mit $\frac{1}{4}m^2$ nach §. 198 No. XIV. geschehen kan.

$$m^2x^2 - m^2x = 2mp - 2m$$

$$+\tfrac{1}{4}m^2 \qquad\qquad +\tfrac{1}{4}m^2$$

$$m^2x^2 - m^2x + \tfrac{1}{4}m^2 = 2mp - 2m + \tfrac{1}{4}m^2$$

$$\sqrt{4m^2x^2 - 4m^2x + m^2} = \sqrt{8mp - 8m + m^2}$$

$$2mx - m = \sqrt{8mp - 8m + m^2}$$

$$2m)\ 2mx = \sqrt{8mp - 8m + m^2)} + m$$

$$x = \frac{\sqrt{8mp - 8m + m^2)} + m}{2m}$$

$$x = \frac{\sqrt{8p - 8 + m)m} + m}{2m}$$

Hier werden die Factoren m von drei Gliedern weggethan, und dieselbige nach §. 85 auf einmal damit multiplicirt.

Resolution,

wobei die Icosigonalcentralzahl, d. i. die 20 ekigte Zahl 1321, angenommen werden sol.

Wie solche Centralzahlen gefunden werden, ist nach §. 367 u. f. bekant.

Also ist $p = 1321$

$$
\begin{array}{rr}
 & 1321 \\
 & 8 \\
\hline
\text{und } 8p = & 10568 \\
 & -8 \\
\hline
 & 10560 \\
m = & 20 \\
\hline
 & 10580 \\
 & 20 = m \text{ multiplicirt.} \\
\hline
 & \sqrt{211600} \\
\hline
 & 460 \\
m = & 20 \\
\hline
2m = & 40)\ 480 \\
\hline
 & 12 \text{ Die Centralpoliigonalwurzel.}
\end{array}
$$

§. 589. Da man sich auch §. 249 Nota wegen Ausziehung der Quadratwurzeln aus sogenanten Binomien auf die quadratische Gleichungen beruffen hat, so sol nun gezeiget werden, wie hierzu eine Regel zu finden.

§. 590. Was ein Binomium sei, solches ist schon nach §. 241 bekant, nemlich: **Eine Grösse, welche aus zwei Gliedern bestehet, davon einem oder beiden das Quadratwurzelzeichen vorstehet.**

§. 591. Die Ausziehung der Wurzel aus einem Binomium wird nun folgender Massen verrichtet:

Es sei z. E. das Binomium: $a + \sqrt{b}$, so wird für desselben Wurzel genommen: $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, davon das Quadrat ist: $x + 2\sqrt{xy} + y$ (davon s. die Probe §. 245).

Dieses Quadrat muß dem Binomium $a + \sqrt{b}$ gleich sein, mithin ist die Gleichung davon also:

$$x + 2\sqrt{xy} + y = a + \sqrt{b}$$

oder, welches einerlei ist:

$$x + y + 2\sqrt{xy} = a + \sqrt{b}$$

Da ferner die Rationalglieder der unbekanten Grösse: $x+y$, dem Rationalglied der bekanten Grösse: a, sodann das Irrationalglied der unbekanten Grösse: $2\sqrt{xy}$, dem Irrationalglied der bekanten Grösse: $\sqrt{b}$, gleich sein muß, so hat man folgende zwo Gleichungen: $x+y=a$, und: $2\sqrt{xy}=\sqrt{b}$, von welchen die Wehrten der unbekanten Grösse also gefunden werden:

$$x+y=a$$ Hier wird zuerst der Wehrt von y gesucht.
$$y=a-x$$

Nun sage:

$$2\sqrt{xy}=\sqrt{b}$$ Um die Wurzelzeichen wegzuschaffen, so werden beide Theile quadrirt (§. 180).
$$4x)\ 4xy=b$$
$$y=\frac{b}{x4}$$

Diese erhaltene beide Wehrten von y werden nun in eine Gleichung gebracht, um auch den Wehrt von x zu erhalten:

$$a-x=\frac{b}{4x}$$ Mit $4x$ gegrössert.

$$4xa-4x^2=b$$ Um das Quadratglied: $-4x^2$, positiv zu bekommen, so wird die Gleichung umgewandt (§. 497), und alsdann nach §. 198 No. X. mit a^2 supplirt.

$$-b=4x^2-4xa$$
$$+a^2 \qquad +a^2$$
$$\sqrt{a^2-b}=\sqrt{4x^2-4xa+a^2}$$
$$\sqrt{a^2-b}=2x-a$$
$$2)\ \sqrt{a^2-b})+a=2x$$
$$\frac{\sqrt{a^2-b})+a}{2}=x$$

Also ist nach dieser Gleichung der Wehrt von x die Grösse: $\frac{\sqrt{a^2-b})+a}{2}$, und das erste Glied des Binomiums, davor nun das Wurzelzeichen gesezet wird:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{a^2-b})+a}{2}}$$

Der

Der Wehrt von y aber ist nach der ersten Gleichung: $a - x$. Wird nun an die Stelle von x der vorige Wehrt von x gesezet (§. 548), so erhält man den Wehrt von y also:

$$a - \frac{\sqrt{a^2 - b}) + a}{2}, \text{ oder reducirt: } \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2},$$

davor, wie vorhin, das Wurzelzeichen komt: $\sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$

Die Reduction des Bruchs wird, wie §. 582, durch gemeine Zahlen begreiflich; dann da sei, z. E. $a = 4$, und $\sqrt{a^2 - b} = 2$, so ist $4 - \frac{2 + 4}{2} = 1$, und $\frac{4 - 2}{2}$ auch $= 1$.

§. 592. Solchemnach ist die **Wurzel aus dem Binomium**: $a - \sqrt{b}$, also formiret:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 - b}) + a}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

aus welcher zu Ausziehung der Wurzel aus allen Binomien folgende allgemeine Regeln hergeleitet werden:

Erstlich: Wird das Rationalglied eines Binomiums quadrirt (a^2), und von diesem Quadrat diejenige Grösse, so unter dem Wurzelzeichen stehet, subtrahirt ($a^2 - b$), dabei zu merken ist, daß, wann solche Irrationalgrösse mit einer Rationalgrösse multiplicirt ist, z. E. $2\sqrt{3}$, solche nach §. 239 vorhero ganz irrational gemacht, und unter das Wurzelzeichen gebracht werden muß, sodann aus dem Rest die Quadratwurzel gezogen ($\sqrt{a^2 - b}$), sofort die Rationalgrösse des Binomiums zu der Quadratwurzel addirt ($\sqrt{a^2 - b}) + a$), die Summe halbirt $\left(\frac{\sqrt{a^2 - b} + a}{2}\right)$, und endlich aus sothaner Helfte abermahl die Quadratwurzel gezogen $\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 - b} + a}{2}}$, so hat man das erste Glied der Quadratwurzel.

Zweitens: Wird die in diesem ersten Theil der Wurzel enthaltene Quadratwurzel von dem Rationalglied des Binomiums

nomiums subtrahirt ($a - \sqrt{a^2 - b}$), der Rest halbirt $\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}$, und aus dieser Helfte die Wurzel gezogen $\sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$, so hat man auch das zweite Glied der Wurzel.

§. 593. Wann sich nun bei einer algebraischen Rechnung ein Binomium ereignet, aus welchem die Quadratwurzel gezogen werden sol, so werden für die Buchstaben diejenige gemeine Zahlen, wann sie nicht schon vorhanden sind, wieder genommen, für welche bei der Vorgabe die Buchstaben erwählet worden (§ 493. 500), woraus alsdann nach den jezt gefundenen Regeln die Wurzel gezogen wird.

Z. E. Man hätte das Binomium $a + b\sqrt{c}$, und es wäre $a = 9$, $b = 4$, und $c = 5$, so würde die Formel in gemeinen Zahlen: $9 + 4\sqrt{5}$ sein, und die Wurzel also gefunden werden:

I.)	81	Das Quadrat des Rationalgliedes 9.
	— 80	Die Zahl des multiplicirten Irrationalgliedes: $4\sqrt{5}$, nach §. 239 ganz irrational gemacht.
	1	Hieraus die Quadratwurzel, welche 1 ist (§. 171).
	+ 9	Das Rationalglied.
	2) 10	
	$\sqrt{5}$	Hieraus die Wurzel; weil es aber nicht geschehen kan, so wird solche nur angedeutet.
II.)	9	Das Rationalglied.
	— 1	Die im ersten Theil der Wurzel enthaltene Quadratwurzel.
	2) 8	
	$\sqrt{4}$	Hieraus ist die Quadratwurzel 2 das andere Glied der Wurzel, folglichen die ganze Quadratwurzel: $2 + \sqrt{5}$.
	2	

Probe: $\left.\begin{matrix} 2 + \sqrt{5} \\ 2 + \sqrt{5} \end{matrix}\right\}$ (s. §. 245. 232).

$$\begin{array}{r} 2\sqrt{5} + 5 \\ 4 + 2\sqrt{5} \quad \\ \hline 4 + 4\sqrt{5} + 5 \end{array}$$

d. i. reducirt: $9 + 4\sqrt{5}$.

Item:

Item: Aus dem Binomium: $7 + 2\sqrt{10}$, die Wurzel zu ziehen:

I.) 49 Das Quadrat des Rationalgliedes.
-40 Die Zahl des ganz irrational gemachten Gliedes: $2\sqrt{10}$ (§. 239).
$\sqrt{9}$
3
$+7$ Das Rationalglied.
$2)\,10$
$\sqrt{5}$, also ist $\sqrt{5}$ das eine Glied der Wurzel.

II.) 7 Das Rationalglied.
-3 Vorige Quadratwurzel.
$2)\,4$
$\sqrt{2}$, mithin ist $\sqrt{2}$ das andere Glied, und die ganze Wurzel: $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ aus dem Binomium $7 + 2\sqrt{10}$.

Probe: $\left.\begin{array}{r}\sqrt{5} + \sqrt{2} \\ \sqrt{5} + \sqrt{2}\end{array}\right\}$ (§. 245. 232).

$$\begin{array}{r} \sqrt{10} + 2 \\ 5 + \sqrt{10} \\ \hline 5 + 2\sqrt{10} + 2 \end{array}$$

reducirt: $7 + 2\sqrt{10}$.

Item: Aus dem Binomium: $11 - 2\sqrt{30}$, die Wurzel zu ziehen:

I.) 121 Quadrat von 11.
-120 Das ganz irrational gemachte Glied: $-2\sqrt{30}$, welches positiv worden (§. 78. 181).
$\sqrt{1}$
1 Quadratwurzel.
$+11$ Rationalglied.
$2)\,12$
$\sqrt{6}$ Das erste Glied der Wurzel.

II.) 11 Rationalglied.
-1 Vorige Quadratwurzel.
$2)\,10$
$\sqrt{5}$ Das zweite Glied der Wurzel, welches nach der Vorgabe negativ sein muß, wie auch die Probe beweiset.

Probe:

Probe: $\left.\begin{array}{r}\sqrt{6}-\sqrt{5}\\ \sqrt{6}-\sqrt{5}\end{array}\right\}$ (s. §. 245. 232).

$$\begin{array}{r} -\sqrt{30}+5 \\ 6-\sqrt{30} \\ \hline 6-2\sqrt{30}+5 \end{array}$$, reducirt: $11-2\sqrt{30}$

Item: Die Wurzel aus dem Binomium: $2+\sqrt{3}$, zu ziehen:

I.) 4 Das Quadrat von 2.
-3 Das Irrationalglied.
$\sqrt{1}$
1
$+2$ Rationalglied.
2) 3
$\sqrt{1\frac{1}{2}}$, oder: $\sqrt{\frac{3}{2}}$

II.) 2 Rationalglied.
-1 Die vorige Wurzel.
2) 1
$\sqrt{\frac{1}{2}}$, mithin ist die Wurzel: $\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Probe: $\left.\begin{array}{r}\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\\ \sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\end{array}\right\}$ (§. 245. 232).

$$\begin{array}{r} \sqrt{\frac{3}{4}}+\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}} \\ \hline \frac{3}{2}+2\sqrt{\frac{3}{4}}+\frac{1}{2} \end{array}$$, reducirt: $2+\sqrt{3}$. Die Erklärung s. §. 245.

Item: Die Wurzel aus $1+4\sqrt{-3}$ zu ziehen:

I.) 1 Das Quadrat von 1 (§. 171).
$+48$ Das ganz irrational gemachte Glied: $4\sqrt{-3}$; dann $4\times4=16$, und -3 mahl $16=-48$, welches unter verkehrtem Zeichen subtrahirt wird (§. 70).
$\sqrt{49}$
7
$+1$
2) 8
$\sqrt{4}$, davon die Wurzel 2 ist.

II.)

II.) 1 Rationalglied.
-7 Die vorige Wurzel.

$2) \, -6$

$\sqrt{-3}$, also ist die Wurzel aus obigem Binomium: $2 + \sqrt{-3}$.

Probe: $\left.\begin{array}{r} 2 + \sqrt{-3} \\ 2 + \sqrt{-3} \end{array}\right\}$ (§. 254. 256).

$$\begin{array}{r} 2\sqrt{-3} - 3 \\ 4 + 2\sqrt{-3} \\ \hline 4 + 4\sqrt{-3} - 3 \end{array}$$, reducirt: $1 + 4\sqrt{-3}$.

Item: Aus $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ die Wurzel zu ziehen:

I.) $\frac{1}{4}$ Das Quadrat von $-\frac{1}{2}$.
$+\frac{3}{4}$ Das ganz irrational gemachte Glied: $\frac{1}{2}\sqrt{-3}$; dann $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, mit -3 multiplicirt, giebt: $-\frac{3}{4}$, und dieses nach §. 70 subtrahirt.

$\sqrt{1}$

1
$-\frac{1}{2}$ Das Rationalglied.

$2) \, \frac{1}{2}$

$\sqrt{\frac{1}{4}}$

II.) $-\frac{1}{2}$ Das Rationalglied.
-1 Die vorige Wurzel.

$2) \, -1\frac{1}{2}$

$\sqrt{-\frac{3}{4}}$, also ist die Wurzel: $\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{-\frac{3}{4}}$.

Probe: $\left.\begin{array}{r} \sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{-\frac{3}{4}} \\ \sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{-\frac{3}{4}} \end{array}\right\}$ (s. §. 254. 261).

$$\begin{array}{r} \frac{1}{4}\sqrt{-3} - \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{-3} \\ \hline \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{-3} - \frac{3}{4} \end{array}$$, reducirt: $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

Item: Aus $2\sqrt{-1}$ die Quadratwurzel zu ziehen:

I.) 0 Das Quadrat von der Rationalzahl, weil keine vorhanden ist.
$+4$ Das ganz irrational gemachte Glied: $2\sqrt{1}$, wie vorhin subtrahirt.

$\sqrt{4}$

2 Die Wurzel.
-0 Das Rationalglied.

$2) \, 2$

$\sqrt{1}$

II.)

II.) 0 Das Rationalglied.
-2 Die vorige Wurzel.

$2)\,-2$

$\sqrt{-1}$, also ist die Wurzel aus $2\sqrt{-1} = \sqrt{1} + \sqrt{-1}$.

Probe: $\left.\begin{array}{l}\sqrt{1}+\sqrt{-1}\\ \sqrt{1}+\sqrt{-1}\end{array}\right\}$ (s. §. 254. 261).

$$\begin{array}{r} 1\sqrt{-1}-1 \\ 1+1\sqrt{-1} \\ \hline 2\sqrt{-1} \end{array}$$

Item: Die Wurzel aus $20\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{385}$ zu ziehen (Diesen Fall siehe §. 574 Nota).

I.) $\frac{1681}{4}$ Das Quadrat von $20\frac{1}{2}$.
$-\frac{385}{4}$ Das ganz irrational gemachte Glied: $\frac{1}{2}\sqrt{385}$ (s. §. 239).

$\frac{1296}{4}$ Zu Ganzen reducirt.

$\sqrt{324}$

18
$+20\frac{1}{2}$ Rationalglied.

$2)\,38\frac{1}{2}$

$19\frac{1}{4}$ Gleichnahmig resolvirt.

$\sqrt{\frac{77}{4}}$ Zum Theil rational (s. §. 237).

$\frac{1}{2}\sqrt{77}$

II.) $20\frac{1}{2}$ Das Rationalglied.
-18 Die vorhin gefundene Wurzel.

$2)\,2\frac{1}{2}$

$\sqrt{1\frac{1}{4}}$ Gleichnahmig resolvirt.

$\sqrt{\frac{5}{4}}$ Zum Theil rational.

$\frac{1}{2}\sqrt{5}$

Also ist die Wurzel von obigem Binomium: $\frac{1}{2}\sqrt{77} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, wovon die Probe §. 574 befindlich ist.

Nota. Ehe und bevor zum dritten Grad, oder zu den cubischen Gleichungen, geschritten werde, ist nöthig, wegen der verschiedenen Wurzeln oder Wehrten von x noch Folgendes anzuzeigen:

§. 594. Aus dem Vorhergehenden ist bekant, daß bei einer quadratischen Gleichung zweierlei Auflösungen um deswillen statt finden, weil die Quadratwurzel sowohl positiv als negativ angenommen werden kan.

§. 595. Es ist aber noch ein anderer Grund vorhanden, daß bei einer quadratischen Gleichung zweierlei Auflösungen sein können, und welcher in Ansehung der Gleichungen von künftigen höhern Potenzen bekant sein muß.

§. 596. Dieser Grund bestehet darinnen, daß man eine jede **quadratische Gleichung** als ein **Product zweier unterschiedener Factoren** betrachten könne.

§. 597. Hierzu ist nöthig, eine Gleichung zuvörderst in Nichts zu verwandeln, welches geschiehet, wann die Glieder einer Seite unter verkeheten Zeichen auf die andere Seite gebracht werden (§. 492).

Z. E. Es sei die reine quadratische Gleichung (§. 560):

$$x^2 = 81$$

so ist ihre **Nichtsverwandelung**:

$$x^2 - 81 = 0$$

Oder: Es sei die vollständige quadratische Gleichung (§. 567):

$$x^2 - 10x + 25 = 4$$

so ist ihre **Nichtsverwandelung**:

$$x^2 - 10x + 25 - 4 = 0 \text{ Reducirt}$$

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

§. 598. Was die reine **quadratische Nichtsverwandelung** betrift, so beruhet deren zweierlei Auflösung lediglich auf ihren Wurzeln (§. 562 Nota); bei der **Nichtsverwandelung einer vollständigen quadratischen Gleichung** aber können **zween Factoren** gefunden werden, deren Product sothaner Nichtsverwandelung gleich sei (§. 596), und welche zugleich die **zween Wehrte** von x sind.

§. 599.

§. 599. Sollen aber zween Factoren ein Product machen, so Nichts ist, so müssen solche, oder wenigstens einer davon, natürlicher Weise auch Nichts sein, davon die Beschaffenheit zum Voraus zu wissen nöthig ist, indeme ohne dieses zu Aufsuchung derselben keine Regel gegeben werden kan.

§. 600. Wann man also, wie hiernächst wird gelehret werden, zwo Zahlen zu Factoren gefunden hat, so werden solche gleich x genommen, und durch diesen Buchstaben also zu Nichts gemacht.

Z. E. Man hätte die beide Zahlen: 3 und 7, zu Factoren erhalten, so nimt man $3 = x$ und $7 = x$, folglichen werden sie in Nichts verwandelt: $x - 3$ und $x - 7$: welches auch ganz begreiflich ist; dann ist $x = 3$, so ist $x - 3 = 0$; und ist $x = 7$, so muß $x - 7 = 0$ sein, u. s. f.

Werden diese beide in Nichts verwandelte Factoren zum Product gebracht, so erhält man die in Nichts verwandelte Gleichung:

$$\begin{array}{r} x - 3 \\ x - 7 \\ \hline -7x + 21 \\ x^2 - 3x \quad\quad \\ \hline x^2 - 10x + 21 = 0 \end{array}$$

Daß dieses Product würklich Nichts sei, solches beweiset die Multiplication mit den Factoren: 3 und 7;

dann ist $x = 3$, so ist $x^2 = 9$

$-10x = -30$; dann -10×3 giebt -30

$$\begin{array}{r} -21 \\ +21 \\ \hline 0 \end{array}$$

Ist $x = 7$, so ist $x^2 = 49$

$-10x = -70$; dann -10×7 macht -70

$$\begin{array}{r} -21 \\ +21 \\ \hline 0 \end{array}$$

§. 601. Hier wurde durch die angenommene Factoren 3 und 7, welche auf obige Nichtsverwandelung (§. 597) passen, die Procedur nur zur Erläuterung gezeiget; wie aber bei einer jeden Nichtsverwandelung zween Factoren als Wehrten von x gefunden werden, darzu erhält man eine allgemeine Regel, wann die Factoren als Nichts allgemein vorgestellet und zu einem Product gebracht werden.

Z. E. Es seien, nach Masgab voriger Factoren $x-3$ und $x-7$, die allgemeine Formeln: $x-p$ und $x-q$, so ist die Multiplication:

$$\begin{array}{r} x-p \\ x-q \\ \hline -qx+pq \\ x^2-px \\ \hline x^2-px-qx+pq \\ \hline x^2-(p+q)x+pq \end{array}$$

Reducirt nach §. 85.

§. 602. Aus diesem Product erkennet man, daß die Zahl des dritten Gliedes (pq) also in zween Factoren getheilet werden müsse, daß die Summe der beiden Factoren der Zahl des zweiten Gliedes ($p+q$) gleich sei, oder, welches zu gegenwärtiger Absicht dienet: daß die Zahl, oder der Coefficient, des zweiten Gliedes ($p+q$) also in zween Theile getheilet werden müsse, daß das Product sothaner Theilen dem dritten Glied (pq), oder der gemeinen Zahl, gleich sei, als worzu die Regeln bereits §. 266 gegeben worden.

§. 603. Hat man eine quadratische Gleichung, NB. in gemeinen Zahlen (§. 492), in Nichts verwandelt (§. 597), so werden alsdann, vermög jezt gefundenen Eigenschaften, nach bemeldtem 266sten §en, die beiden Factoren der Nichtsverwandelung, und somit die beide Wehrten von x gefunden (§. 598).

Z. E. Es sei die Gleichung:

$$x^2 + 2xb + b^2 = a$$

Wird dabei $a = 484$ und $b = 7$ genommen, so ist alsdann die Formel:

$$x^2 + 14x + 49 = 484$$ In Nichts verwandelt und reducirt.

$$x^2 + 14x + 49 - 484 = 0$$

$$x^2 + 14x - 435$$

Die Theilung des zweiten Glieds geschiehet nun nach §. 266 b) also:

Halb 14 ist 7, das Quadrat davon 49, hiervon — 435 (§. 71).

$$\frac{+435}{\sqrt{484}} \quad 22$$

$$\frac{7 - \sqrt{484}}{7 - 22 = -15} \; . \; \frac{7 + \sqrt{484}}{7 + 22 = 29}$$

Also wurde die Zahl des zweiten Glieds 14 in zween Theile, nemlich in — 15 und 29 getheilt, davon die Summe = 14 ist (§. 602), welches auch die beide Factoren der Gleichung sind (§. 596); dann 29×-15 giebt -435, und so sie als Nichts vorgestellet werden (§. 600):

$$\left.\begin{matrix} x + 29 \\ x - 15 \end{matrix}\right\} \text{(s. §. 612. 2).}$$

$$\begin{array}{r} -15x - 435 \\ x^2 + 29x \\ \hline x^2 + 14x - 435 \end{array}$$

§. 604. Diese gefundene Factoren: — 15 und 29, sind nun auch die beiden Wehrten von x, sowohl bei der Nichtsverwandelung, als auch bei der würklichen Gleichung, mit der Ausnahme, daß, weil das zweite Glied der Nichtsverwandelung positiv, und das dritte negativ, der kleinere Wehrt — 15 positiv, der grössere Wehrt 29 aber negativ genommen werden müsse, welche Ausnahme von den Abwechselungen der Zeichen herrühret.

Resolution der Nichtsverwandelung:

Ist $x = 15$, so ist $x^2 = 225$

$$\begin{array}{r} 14x = 210 \\ \hline 435 \\ -435 \\ \hline 0 \end{array}$$

Ist $x = -29$, so ist $x^2 = 841$ (s. §. 181).

$$\begin{array}{r} 14x = -406 \\ \hline 435 \\ -435 \\ \hline 0 \end{array}$$

Resolution der würklichen Gleichung
$x^2 + 14x + 49 = 484$:

Ist $x = 15$, so ist $x^2 = 225$

$$\begin{array}{r} 14x = 210 \\ \hline 435 \\ +49 \\ \hline 484 = 484 \end{array}$$

Ist $x = -29$, so ist $x^2 = 841$ (s. §. 181).

$$\begin{array}{r} 14x = -406 \\ \hline 435 \\ +49 \\ \hline 484 = 484 \end{array}$$

§. 605. Weil die vorhin gedachte Ausnahme bei denen erhaltenden negativen und positiven Factoren, oder Theilen des zweiten Gliedes, als Wehrten von x, aufs Zukünftige gewisse und zuverlässige Regeln erfordern, so folgen dieselbige nach Masgab §. 266:

a) Hat bei einer Nichtsverwandelung das zweite Glied das Zeichen — und das dritte +, so müssen die beiden Wehrte von x positiv sein.

Z. E. Die Nichtsverwandelung sei:

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

Die

Die Theilung des zweiten Glieds (§. 266 a):

Halb -10 ist -5, das Quadrat davon 25 (§. 181).

$$\begin{array}{r} -21 \\ \hline \sqrt{4} \\ \hline 2 \end{array}$$ Das Product, oder dritte Glied.

Nun sage: $\dfrac{-5-\sqrt{4}}{-5-2=-7} \,.\, \dfrac{-5+\sqrt{4}}{-5+2=-3}$

Also sind die beiden Factoren und Wehrten von x nach obiger Regel: 7 und 3.

Probe:

$$\begin{array}{r} x-3 \\ x-7 \\ \hline -7x+21 \\ x^2-3x \\ \hline x^2-10x+21=0 \end{array}$$

$x-3$, $x-7$: Beide in Nichts verwandelte Factoren (§. 600).

$x^2-10x+21=0$ Nichtsverwandelung.

Probe, daß diese beiden Wehrten von x die Nichtsverwandelung aufheben:

Ist $x=3$, so ist
$$\begin{array}{rr} x^2 = & 9 \\ -10x = & -30 \\ \hline & -21 \\ & +21 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Ist $x=7$, so ist
$$\begin{array}{rr} x^2 = & 49 \\ -10x = & -70 \\ \hline & -21 \\ & +21 \\ \hline & 0 \end{array}$$

b) Hat das zweite Glied der Nichtsverwandelung das Zeichen $+$, und das dritte $-$, so muß der kleinere Wehrt positiv und der grössere Wehrt negativ sein.

Z. E. Die Nichtsverwandelung sei:

$x^2+3x-28=0$

Die Theilung des zweiten Glieds (§. 266 b):

Halb 3 ist $1\frac{1}{2}$, das Quadrat davon $2\frac{1}{4}$

$$\frac{\frac{28 - 28 \text{ wird addirt (§. 71).}}{\sqrt{30\frac{1}{4}}}}{5\frac{1}{2}}$$

Nun sage: $\frac{1\frac{1}{2} - \sqrt{30\frac{1}{4}}}{1\frac{1}{2} - 5\frac{1}{2} = -4} \cdot \frac{1\frac{1}{2} + \sqrt{30\frac{1}{4}}}{1\frac{1}{2} + 5\frac{1}{2} = 7}$

Also sind die beiden Factoren und Wehrten von x nach vorstehender Regel: 4 und -7.

Probe: $\left.\begin{array}{r} x - 4 \\ x + 7 \end{array}\right\}$ Beide in Nichts verwandelte Factoren (§. 600).

$$\begin{array}{r} x - 4 \\ x + 7 \\ \hline 7x - 28 \\ x^2 - 4x \quad\; \\ \hline x^2 + 3x - 28 = 0 \end{array}$$

Probe, daß diese beiden Wehrten von x die Nichtsverwandelung aufheben:

Ist $x = 4$, so ist $\begin{array}{r} x^2 = 16 \\ 3x = 12 \\ \hline 28 \\ -28 \\ \hline 0 \end{array}$

Ist $x = -7$, so ist $\begin{array}{r} x^2 = 49 \\ -3x = -21 \\ \hline 28 \\ -28 \\ \hline 0 \end{array}$

c) Haben beide, das zweite und dritte Glied einer Nichtsverwandelung, das Zeichen —, so muß der kleinere Wehrt negativ, und der grössere Wehrt positiv sein.

Z. E. Die Nichtsverwandelung sei:

$$x^2 - 3x - 28 = 0$$

Die Theilung des zweiten Glieds (§. 266 c):

Halb -3 ist $-1\frac{1}{2}$, das Quadrat davon $2\frac{1}{4}$

$$\begin{array}{r} 2\frac{1}{4} \\ +28 \text{ (s. §. 71).} \\ \hline \sqrt{30\frac{1}{4}} \\ \hline 5\frac{1}{2} \end{array}$$

Nun sage: $\underline{-1\frac{1}{2}-\sqrt{30\frac{1}{4}} \qquad -1\frac{1}{2}+\sqrt{30\frac{1}{4}}}$

$-1\frac{1}{2}-5\frac{1}{2}=-7 \quad . \quad 1\frac{1}{2}+5\frac{1}{2}=4$

Also sind die beiden Factoren und Wehrten von x nach vorstehender Regel: -4 und 7.

Probe: $\left.\begin{array}{r} x+4 \\ x-7 \end{array}\right\}$ Beide in Nichts verwandelte Factoren (§. 600).

$$\begin{array}{r} x+4 \\ x-7 \\ \hline -7x-28 \\ x^2+4x \\ \hline x^2-3x-28=0 \end{array}$$

Probe, daß diese beiden Wehrten von x die Nichtsverwandelung aufheben:

Ist $x=-4$, so ist $x^2=16$

$-3x=+12$; dann -4×-3 ist $=+12$ (§. 78).

$$\begin{array}{r} 28 \\ -28 \\ \hline 0 \end{array}$$

Ist $x=7$, so ist $x^2=49$

$-3x=-21$

$$\begin{array}{r} 28 \\ -28 \\ \hline 0 \end{array}$$

d) Haben beide, das zweite und dritte Glied der Nichtsverwandelung, das Zeichen $+$, so müssen beide Wehrten negativ sein.

Z. E. Die Nichtsverwandelung sei:

$x^2+11x+28=0$

Die Theilung des zweiten Glieds (§. 266 d):

Halb 11 ist $5\frac{1}{2}$, das Quadrat davon $30\frac{1}{4}$

$$\begin{array}{r} 30\frac{1}{4} \\ -28 \\ \hline \sqrt{2\frac{1}{4}} \\ \hline 1\frac{1}{2} \end{array}$$

Nun sage: $\dfrac{5\frac{1}{2} - \sqrt{2\frac{1}{4}}}{5\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 4} \cdot \dfrac{5\frac{1}{2} + \sqrt{2\frac{1}{4}}}{5\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 7}$

Also sind die beiden Factoren und Wehrten von x nach gegenwärtiger Regel: -4 und -7.

Probe: $\left.\begin{array}{r} x+4 \\ x+7 \end{array}\right\}$ Beide in Nichts verwandelte Factoren (§. 600).

$$\begin{array}{r} x+4 \\ x+7 \\ \hline 7x+28 \\ x^2+4x \\ \hline x^2+11x+28=0 \end{array}$$

Probe, daß diese beiden Wehrten von x die Nichtsverwandelung aufheben:

Ist $x = -4$, so ist $x^2 = 16$

$$\begin{array}{r} x^2 = 16 \\ 11x = -44 \\ \hline -28 \\ +28 \\ \hline 0 \end{array}$$

Ist $x = -7$, so ist $x^2 = 49$

$$\begin{array}{r} x^2 = 49 \\ 11x = -77 \\ \hline -28 \\ +28 \\ \hline 0 \end{array}$$

§. 606. Ist bei einer Nichtsverwandelung die Helfte des zweiten Gliedes die Wurzel vom dritten Glied, so hat man zween gleiche Wehrten von x.

Z. E. Die Nichtsverwandelung sei:

$$x^2 + 12x + 36 = 0$$

Die

Die Theilung des zweiten Glieds (§. 266):

Halb 12 ist 6, das Quadrat davon 36

$$\begin{array}{r} 36 \\ -36 \\ \hline \sqrt{0} \\ \hline 0 \end{array}$$

Nun sage: $\dfrac{6-\sqrt{0}}{6-0=6} \cdot \dfrac{6+\sqrt{0}}{6+0=6}$

Also sind die beiden Factoren und Wehrten von $x=6$, und zwar nach Lit. d, negativ.

Probe: $\left.\begin{array}{r} x+6 \\ x+6 \end{array}\right\}$ Beide in Nichts verwandelte Factoren (§. 600).

$$\begin{array}{r} x+6 \\ x+6 \\ \hline 6x+36 \\ x^2+6x \\ \hline x^2+12x+36=0 \end{array}$$

Probe, daß diese beiden Wehrten von x die Nichtsverwandelung aufheben:

Ist $x=-6$, so ist $x^2=36$

$$\begin{array}{r} 12x=-72 \\ \hline -36 \\ +36 \\ \hline 0 \end{array}$$

Oder: Es sei die Nichtsverwandelung:

$x^2-12x+36$

Die Theilung des zweiten Glieds (§. 266 b):

Halb -12 ist -6, das Quadrat davon 36

$$\begin{array}{r} 36 \\ -36 \\ \hline \sqrt{0} \\ \hline 0 \end{array}$$

Nun sage: $\dfrac{-6-\sqrt{0}}{-6-0=-6} \cdot \dfrac{-6+\sqrt{0}}{-6+0=-6}$

Also sind die beiden Factoren und Wehrten von $x=-6$, und zwar nach Lit. a, positiv.

Probe:

Probe: $\left.\begin{array}{r} x-6 \\ x-6 \end{array}\right\}$ Beide in Nichts verwandelte Factoren (§. 600).

$$\begin{array}{r} -6x+36 \\ x^2-6x \quad \\ \hline x^2-12x+36 \end{array}$$

Probe, daß diese beiden Wehrten von x die Nichtsverwandelung aufheben:

$$\text{Ist } x=6, \text{ so ist } \begin{array}{r} x^2=36 \\ -12x=-72 \\ \hline -36 \\ +36 \\ \hline 0 \end{array}$$

§. 607. Es haben also dergleichen Nichtsverwandelungen würklich zween Wehrte, nur daß sie einander gleich sind; woraus erhellet, daß 0 ein Zeichen sei, das bei algebraischen Rechnungen wohl bemerket werden müsse, indeme aus derselben würklich die Wurzel gezogen werden kan, welches aber aus weniger als 0 nicht möglich ist.

§. 608. Lässet sich aber aus dem Unterschied zwischen dem Quadrat und dem dritten Glied die Wurzel nicht ausziehen (§. 266 e), so ist der Wehrt eine Irrationalzahl (§. 179), und die Auflösung der Gleichung unthunlich, es sei dann, daß man sich sothaner Rationalzahl bedienet (§. 561 Nota).

Z. E. Man hätte vermög einer Gleichung die Nichtsverwandelung erhalten:

$$x^2-14x+20=0$$

Die Theilung des zweiten Glieds (§. 266 e):

$$\text{Halb } -14 \text{ ist } -7, \text{ das Quadrat davon } \begin{array}{r} 49 \\ -20 \\ \hline \sqrt{29} \end{array}$$

$$\text{Nun sage: } \begin{array}{c} -7-\sqrt{29} \; . \; -7+\sqrt{29} \\ \hline -7-\sqrt{29} \; . \; -7+\sqrt{29} \end{array}$$

Also

Also sind die beiden Factoren und Wehrten von x nach Lit. a positiv, als: $7-\sqrt{29}$ und $7+\sqrt{29}$, welche man zusammen bezeichnet: $7\mp\sqrt{29}$, oder, welches einerlei: $7\pm\sqrt{29}$ (§. 266 e).

Probe: $\left.\begin{array}{l} x-7-\sqrt{29} \\ x-7+\sqrt{29} \end{array}\right\}$ Beide in Nichts verwandelte Factoren (§. 600).

$$\begin{array}{r} x\sqrt{29}-7\sqrt{29}-29 \\ -7x+49+7\sqrt{29} \\ x^2-7x-x\sqrt{29} \\ \hline x^2-14x+49-29 \\ \hline x^2-14x+20=0 \end{array}$$

Probe, daß diese beiden Wehrten von x die Nichtsverwandelung aufheben:

Ist $x=7-\sqrt{29}$, so ist $\left.\begin{array}{r} x^2=78-14\sqrt{29} \\ -14x=-98+14\sqrt{29} \end{array}\right\}$ Die Multiplication s. §. 243.

$$\begin{array}{r} -20 \\ +20 \\ \hline 0 \end{array}$$

Mit $7+\sqrt{29}$ ist die Probe eben also.

§. 609. Komt der Unterschied zwischen dem Quadrat und dem dritten Glied negativ (§. 266 f), so kan die Wurzel ohnmöglich ausgezogen und die Gleichung aufgelöset werden (§. 251), sondern man muß sich lediglich mit der desfals angenommenen Formel begnügen (§. ibid. s. auch die Auflösung §. 561 Nota).

Z. E. Es wäre die Nichtsverwandelung:

$$x^2-10x+30=0$$

Die Theilung des zweiten Glieds (§. 266 f):

Halb -10 ist -5, das Quadrat davon 25

$$\begin{array}{r} 25 \\ -30 \\ \hline \sqrt{-5} \end{array}$$

Nun sage: $\dfrac{-5-\sqrt{-5}\,.\,-5+\sqrt{-5}}{-5-\sqrt{-5}\,.\,-5+\sqrt{-5}}$

Also

Also sind die beiden Factoren und Wehrten von x nach Lit. a positiv, nemlich: $5 - \sqrt{-5}$ und $5 + \sqrt{-5}$, welche zusammen bezeichnet werden: $5 \mp \sqrt{-5}$, oder, welches einerlei: $5 \pm \sqrt{-5}$ (§. 266 f).

Probe: $\left.\begin{array}{l} x - 5 - \sqrt{-5} \\ x - 5 + \sqrt{-5} \end{array}\right\}$ Beide in Nichts verwandelte Factoren (§. 600). Die Multiplication s. §. 264. 3.

$$\begin{array}{r} x\sqrt{-5} - 5\sqrt{-5} + 5 \\ -5x + 25 + 5\sqrt{-5} \\ x^2 - 5x - x\sqrt{-5} \\ \hline x^2 - 10x + 25 + 5 \\ \hline x^2 - 10x + 30 \end{array}$$

Probe, daß diese beiden Wehrten von x die Nichtsverwandelung aufheben:

Ist $x = 5 + \sqrt{-5}$, so ist $\left.\begin{array}{r} x^2 = 20 + 10\sqrt{-5} \\ -10x = -50 - 10\sqrt{-5} \end{array}\right\}$ Die Multiplication s. §. 264.

$$\begin{array}{r} -30 \\ +30 \\ \hline 0 \end{array}$$

Mit $5 - \sqrt{-5}$ ist die Probe eben also.

Oder: Die Nichtsverwandelung sei:

$$x^2 + 10x + 49 = 0$$

Die Theilung des zweiten Glieds (§. 266 f):

Halb 10 ist 5, das Quadrat davon 25

$$\begin{array}{r} 25 \\ -49 \\ \hline \sqrt{-24} \end{array}$$

Nun sage: $\dfrac{5 - \sqrt{-24} \;.\; 5 + \sqrt{-24}}{5 - \sqrt{-24} \;.\; 5 + \sqrt{-24}}$

Also sind die beiden Factoren und Wehrten von x nach Lit. d negativ, nemlich: $-5 - \sqrt{-24}$ und $-5 + \sqrt{-24}$.

Probe:

Probe: $x + 5 + \sqrt{-24}$ } Beide in Nichts ver-
$x + 5 - \sqrt{-24}$ } wandelte Factoren
(§. 600). Die Multi-
plication s. §. 264. 3.

$$\begin{array}{l} -x\sqrt{-24} - 5\sqrt{-24} + 24 \\ 5x + 25 + 5\sqrt{-24} \\ x^2 + 5x + x\sqrt{-24} \\ \hline x^2 + 10x + 25 + 24 \\ \hline x^2 + 10x + 49 \end{array}$$

Probe, daß diese beiden Wehrten von x die Nichtsverwandelung aufheben:

Ist $x = -5 - \sqrt{-24}$ } (s. §. 264. 5).
$-5 - \sqrt{-24}$ }

$$\begin{array}{l} 5\sqrt{-24} - 24 \\ 25 + 5\sqrt{-24} \\ \hline \text{so ist } x^2 = 25 + 10\sqrt{-24} - 24 \\ \text{darzu } 10x = -50 - 10\sqrt{-24} \\ \hline -49 \\ +49 \\ \hline 0 \end{array}$$

Die Probe mit $-5 + \sqrt{-24}$ ist eben also.

§. 610. Weiß man nun, wie eine nichtsverwandelte quadratische Gleichung ein Product zweier Factoren sei (§. 598 u. f.), so können allerlei selbstbeliebige Vorgaben componirt werden, wann man erst durch zween Factoren eine Formel, so Nichts ist, formiret, und alsdann dieselbige unter verkehrten Zeichen rükweegs eben so würklich machet, als wie solche in Nichts verwandelt wird (§. 597).

§. 611. Soll aber die Formel ein Product werden, so Nichts ist, so verstehet es sich, wie schon gemeldt, von selbsten (§. 599), daß beide Factoren auch Nichts sein müssen.

§. 612. Dieses als die Hauptsache bei allen quadratischen und höhern Gleichungen recht bekant zu machen, so sollen, nach Masgab der vorstehenden Regeln (§. 605 u. f.), willkühr-

willkührliche Wehrten zu den Factoren genommen, in Nichts verwandelt, und damit Producten als nichtsverwandelte Gleichungen formiret werden.

1) Eine quadratische Gleichung zu machen, deren beide Factoren nach Lit. a positiv und 5 und $4\frac{1}{2}$ sein sollen.

Werden diese beiden Wehrten gleich x gehalten, so werden sie Nichts, wann man $x - 5$ und $x - 4\frac{1}{2}$ nimt, und solche multiplicirt:

$$\begin{array}{l} x - 5 \\ x - 4\frac{1}{2} \\ \hline - 4\frac{1}{2}x + 22\frac{1}{2} \\ x^2 - 5x \\ \hline x^2 - 9\frac{1}{2}x + 22\frac{1}{2} = 0 \text{ Product, so Nichts ist.} \\ \hline x^2 = 9\frac{1}{2}x - 22\frac{1}{2} \text{ Die Gleichung.} \end{array}$$

2) Da nach Lit. b der kleinere Wehrt positiv, der grössere Wehrt negativ, und 4 und -7 sein sollen.

Hier wird $x = 4$ und $= -7$ vorgestellet:

$$\begin{array}{l} x - 4 \\ x + 7 \\ \hline 7x - 28 \\ x^2 - 4x \\ \hline x^2 + 3x - 28 = 0 \text{ Product, so Nichts ist.} \\ \hline x^2 = -3x + 28 \text{ Die Gleichung.} \end{array}$$

3) Da nach Lit. c der kleinere Wehrt negativ, der grössere Wehrt aber positiv, und die Wehrten $-4 + 7$ sein sollen.

Hier wird $x = -4$ und $= 7$ vorgestellet:

$$\begin{array}{l} x - 7 \\ x + 4 \\ \hline 4x - 28 \\ x^2 - 7x \\ \hline x^2 - 3x - 28 = 0 \text{ Product, so Nichts ist.} \\ \hline x^2 = 3x - 28 \text{ Die Gleichung.} \end{array}$$

4) Da

4) Da nach Lit. d die beiden Wehrten negativ sein, und -4 und -7 sein sollen.

Hier wird $x = -7$ und $= -4$ vorgestellet:

$$\begin{array}{r} x+7 \\ x+4 \\ \hline 4x+28 \\ x^2+7x \\ \hline x^2+11x+28=0 \\ \hline x^2=-11x-28 \end{array}$$

$x^2+11x+28=0$ Product, so Nichts ist.
$x^2=-11x-28$ Die Gleichung.

Wil man eine Nichtsverwandelung von Irrational- oder eingebildeten Factoren haben, so wird hierzu §. 608 und 609 die Anweisung gegeben.

§. 613. Hat man auf jezt gezeigte Weise eine Gleichung formiret, so können alsdann die Glieder auf vielerlei Arten getheilt und versezet werden, wann man nur die in dem Vorhergehenden nach und nach gegebene Regeln beobachtet, und die Gleichung in ihrer Waage und Aequation erhält.

Z. E. Die vorige Gleichung $x^2=-11x-28$ kan stehen: $x^2+11x=-28$, item $x^2+4=-12x+x-24$.

§. 614. Es mag also eine quadratische Gleichung beschaffen sein, wie sie wolle, so enthält sie nach ihrer Reduction und Nichtsverwandelung (§. 603) allezeit obige Formel, und somit ein Product zweier Factoren, welche beide auch bei reinen quadratischen Gleichungen (§. 560) statt finden.

Z. E. §. 564 befindet sich die reine quadratische Gleichung:

$$x^2-b^2=a$$

Hierbei ist die bekante Grösse $a=95$
und $b=7$, mithin $b^2=49$

$$\begin{array}{r} \sqrt{144} \\ \hline 12=x \end{array}$$

Um die reine Gleichung zu einer vollständigen Gleichung (§. 567) zu machen, so wird das Quadrat b^2, d. i. 49, weggethan, und der Wehrt in x beigefüget, welcher $=12$, und also

 durch

durch $4x$ geschiehet; weil es aber nur 48 beträgt, so muß dieses Glied um 1 mehr angenommen, folglichen dem andern Theil der Gleichung auch 1 addirt werden, welcher alsdann 96 wird, und die Gleichung also stehet:

$$x^2 - 4x = 96$$

Nichtsverwandelung: $x^2 - 4x - 96 = 0$

Die Theilung des zweiten Glieds (§. 266 c):

Halb -4 ist -2, das Quadrat 4
$+96$ (s. §. 71).
$\sqrt{100}$
10

Nun sage: $-2 - \sqrt{100}$. $-2 + \sqrt{100}$
$-2 - 10 = -12$. $-2 + 10 = 8$

Also sind die beiden Factoren und Wehrten x nach Lit. c: -8 und 12.

Probe: $x + 8$, $x - 12$ } Beide in Nichts verwandelte Factoren (§. 600).

$$\begin{array}{r} -12x - 96 \\ x^2 + 8x \\ \hline x^2 - 4x - 96 \end{array}$$

Probe, daß diese beiden Wehrten von x die Nichtsverwandelung aufheben:

Ist $x = 12$, so ist $x^2 = 144$

$$\begin{array}{r} -4x = -48 \\ \hline 96 \\ -96 \\ \hline 0 \end{array}$$

Ist $x = -8$, so ist $x^2 = 64$

$$\begin{array}{r} -4x = 32; \\ \hline 96 \\ -96 \\ \hline 0 \end{array}$$

dann -4 mahl -8 ist 32 (§. 78).

Item:

Item: §. 570 befindet sich die Gleichung:

$$x^2 + 2xb + b^2 = a$$

Aus beiden Theilen sind die Wurzeln:

$$\begin{array}{l} x + b = 22 \\ \hline x = 22 - b \\ \hline x = 15;\ \text{dann } -b \text{ ist} = -7 \end{array}$$

Wird nun $2bx = 14x$ und $b^2 = 3x$ genommen, so komt in die Gleichung $17x$; weil aber $b^2 = 49$, und $3x = 45$, mithin 4 weniger zugefüget worden, so müssen dem andern Theil der Gleichung auch 4 weniger gemacht werden:

$$\begin{array}{l} x^2 + 17x = a - 4 \\ \hline \end{array}$$

Nichtsverwandelung: $x^2 + 17x - 480 = 0$

Die Theilung des zweiten Glieds (§. 266 b):

Halb 17 ist $8\frac{1}{2}$, das Quadrat davon $72\frac{1}{4}$

$$\begin{array}{r} 72\frac{1}{4} \\ +480 \\ \hline \sqrt{552\frac{1}{4}} \\ \hline 23\frac{1}{2} \end{array}$$

(s. §. 71).

Nun sage:

$$\begin{array}{c|c} 8\frac{1}{2} - \sqrt{552}\ . & 8\frac{1}{2} + \sqrt{552} \\ \hline 8\frac{1}{2} - 23\frac{1}{2} = -15\ . & 8\frac{1}{2} + 23\frac{1}{2} = 32 \end{array}$$

Also sind die beiden Factoren und Wehrten von x nach §. 605 b: $+15$ und -32.

Probe: Beide in Nichts verwandelte Factoren (§. 600).

$$\begin{array}{r} x - 15 \\ x + 32 \\ \hline 32x - 480 \\ x^2 - 15x \\ \hline x^2 + 17x - 480 \end{array}$$

Probe, daß diese beiden Wehrten von x die Nichtsverwandelung aufheben:

Ist $x = 15$, so ist

$$
\begin{array}{r}
x^2 = 225 \\
17x = \underline{255} \\
480 \\
- \underline{480} \\
0
\end{array}
$$

Ist $x = -32$, so ist

$$
\begin{array}{r}
x^2 = 1024 \\
17x = - \underline{544} \\
480 \\
- \underline{480} \\
0
\end{array}
$$

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schirmer, Johann Michael

Johann Michael Schirmer Schul- Schreib- und Rechenmeisters in Frankfurt am Main selbstlehrende Algebra das ist gründliche Anweisung wie ein jeder welcher die gemeine Rechenkunst verstehet diese vortrefliche Wissenschaft ohne mündlichen Unterricht lernen und mittelst derselben alle schwere
Bd.: 4.

Frankfurt am Main (1780)

Math.p. 501-4
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082734-1
VD18 9024642